

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۱- حد

۲- پیوستگی

۳- مشتق

۴- انتگرال

۵- نقاط تقاطع

۶- اعداد مختلط

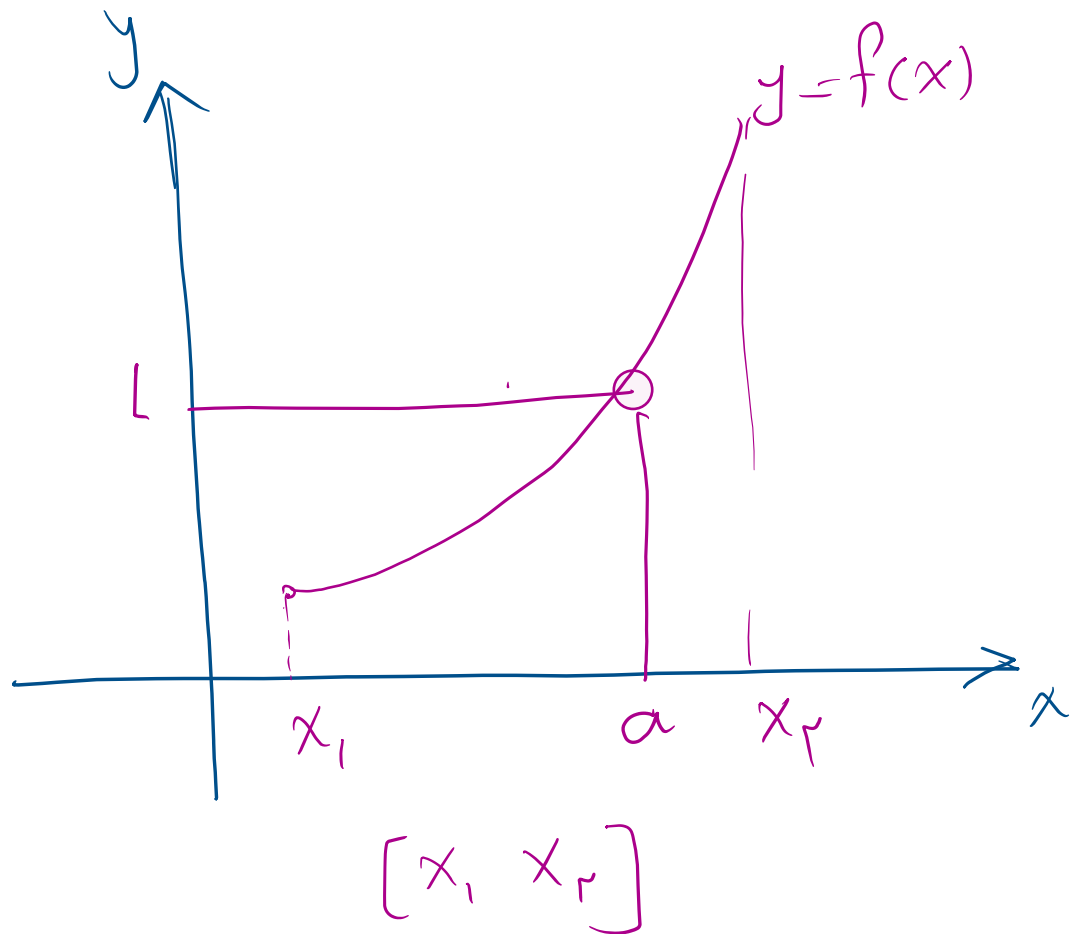
۷- دنباله و سری

۶/۲۰/۱۴۰۳ = تاریخ امتحان

حضور و غیاب داخل المیزان هست

file → upload

الحل

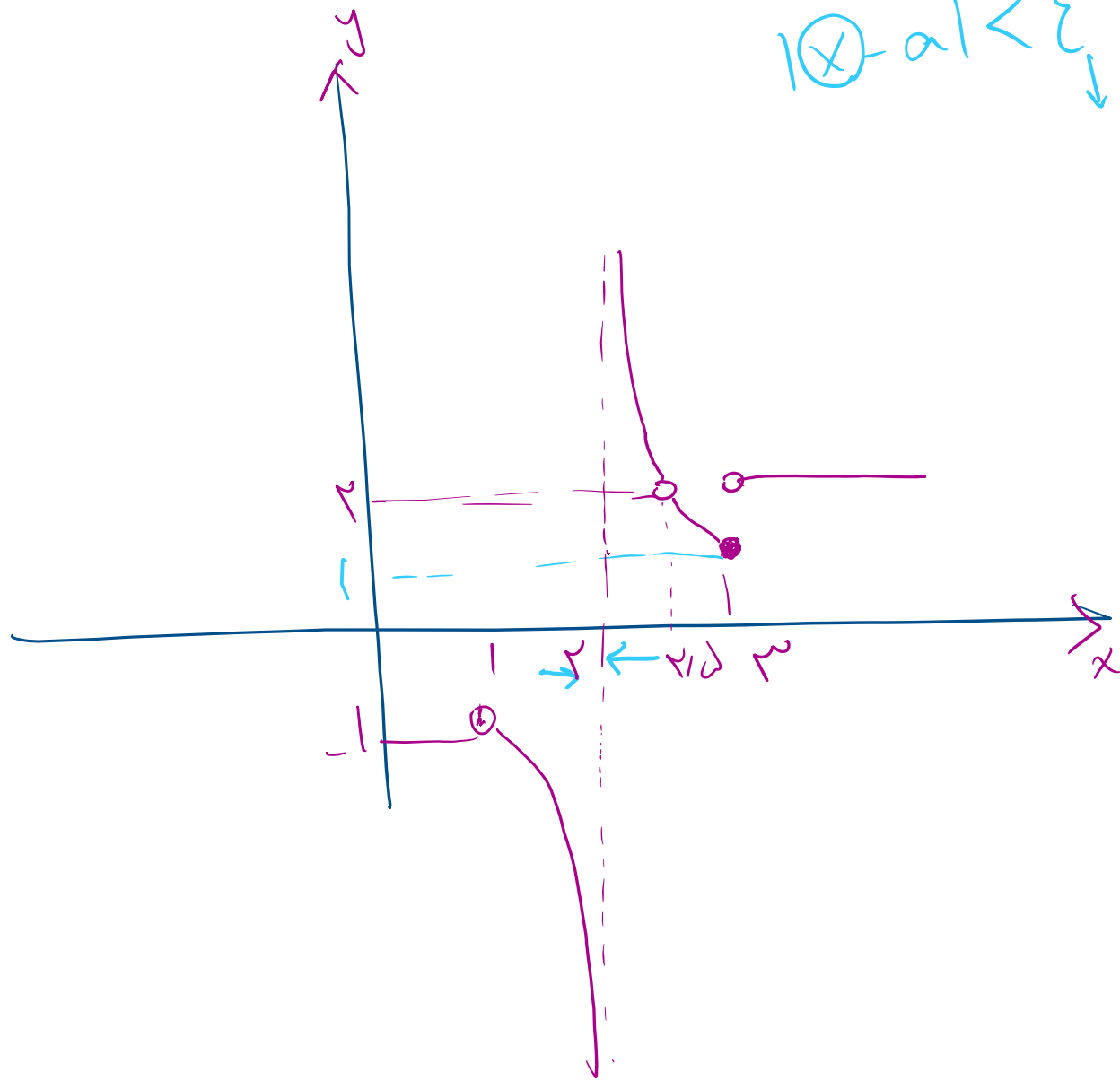


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2 \end{array} \right\} l_1 = l_2 \Rightarrow f(x) \text{ تتقارب نحو } a, \text{ فتساوي } l$



$$1 \otimes a < \varepsilon$$

حد برابر 2 است

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ? \begin{cases} x \rightarrow 2^+ = +\infty \\ x \rightarrow 2^- = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow 3^- = 1 \\ x \rightarrow 3^+ = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow 2.5^- \Rightarrow f(x) = 1 \\ x \rightarrow 2.5^+ \Rightarrow f(x) = 2 \end{cases}$$

حد برابر 2 است

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ [1, \infty)}} \sqrt{x-1} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

قضايا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} C f(x) &= C l \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)^n &= l^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= l_1 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= l_2 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= l_1 + l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) &= l_1 - l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= l_1 \times l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{l_1}{l_2} \end{aligned} \right.$$

$l_2 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$x \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

تابع حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \text{موجود}$$

$\Rightarrow$

$$\lim (f+g)(x) = ? \quad \text{موجود}$$

$$\lim (f-g)(x) = ? \quad //$$

$$\lim \left(\frac{g}{f} \right)(x) = ? \quad //$$

$$\lim \left(\frac{f}{g} \right)(x) = ?$$

$$\lim (f \cdot g)(x) = ?$$

ممكن ان يكون الحد موجودا
ممكن ان يكون غير موجود

قضیه فشردگی با ساندیج

$$\overbrace{f(x)} \leq \overbrace{g(x)} \leq \overbrace{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{x \sin \frac{1}{x}} = ?$$

$$\begin{array}{c} -1 < \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{f(x)} \leq 1 \Rightarrow -x \leq \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \underbrace{x}_{h(x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{-x}_{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{h(x)} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \qquad\qquad\qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \qquad\qquad\qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \end{array}$$

حد برابر با صفر است

قضیه کیدان داره

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \text{محدود}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = ?$$

تابع $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ در $a=0$ محدود است

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

تمرین

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \sin \frac{1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin^2 x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{|x|} = ? \quad \text{تمرین}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega \left(\frac{-1}{x^2} \right) = ? \quad \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} \underbrace{\text{sgn}(x+2)}_{-1} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} (-1) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2-x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3x-1) - (3x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x}{x} = -6$$

lim)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{x+1} & x \in \mathbb{Z} \times \\ \frac{5}{x^2+1} & \checkmark x \notin \mathbb{Z} \checkmark \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x^2+1} = 2,5$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \checkmark \\ -\sqrt{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = ?$$

$$x^3 - x \Rightarrow x(x^2 - 1) = +$$

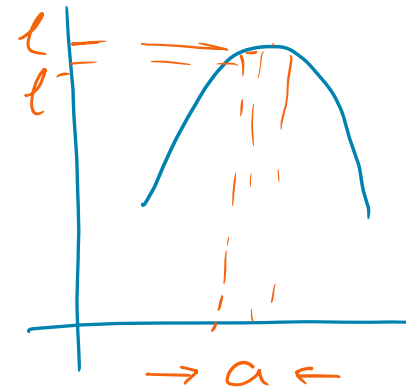
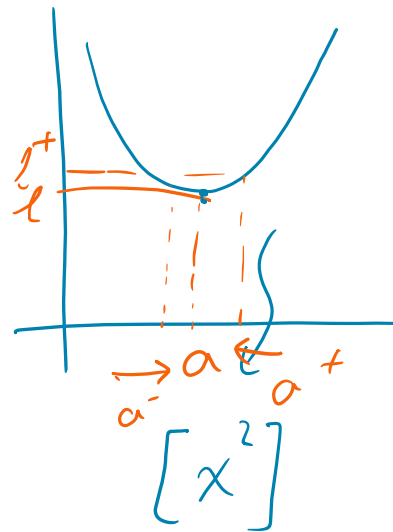
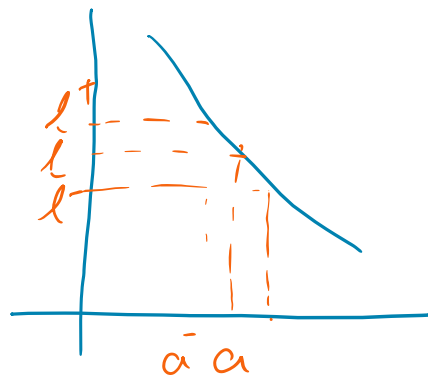
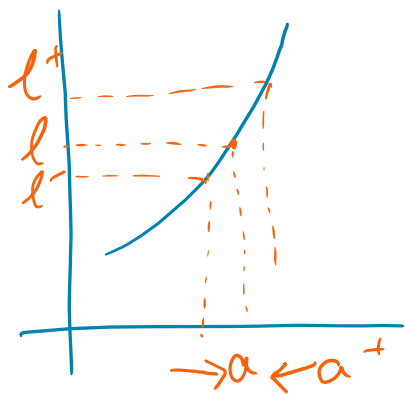
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} [x] = \begin{cases} x \rightarrow 3^+ \Rightarrow \lim f(x) = 3 \\ x \rightarrow 3^- \Rightarrow \lim f(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{, lim} \quad | \quad \lim_{x \rightarrow 3/2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = l$$

$$a \begin{cases} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim f(x) \rightarrow \text{ندار؟} \\ \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim f(x) = \text{حد دارد} \end{cases}$$



$$f(x) = [x^2] \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0^+ \rightarrow 0 \\ 0^- \rightarrow 0 \end{cases}$$

به طوری که هر زمان که x به a نزدیک شود مقدار $f(x)$ به l نزدیک شود
تابع حد ندارد مگر آنکه در آن نقطه تابع یک مقدار داشته باشد

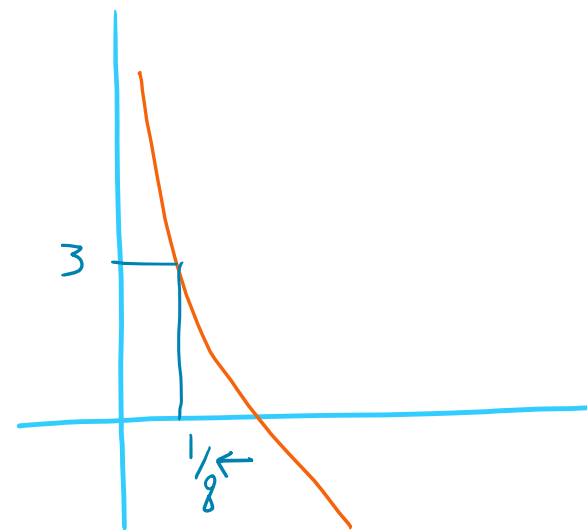
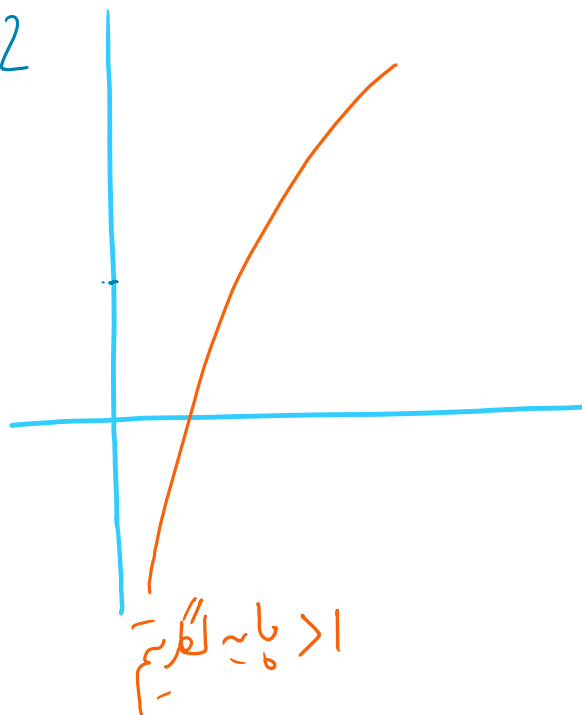
$$(-2, 2)$$

در چند نقطه حد ندارد

$$x^2 = k \Rightarrow x = \pm \sqrt{k} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{1}, 0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{8}^+} \left[\log^x \left(\frac{1}{2} \right) \right] = ? \quad [3^-] = 2$$



$$\begin{array}{c} 4^+ \\ \text{---} \\ 4^- \\ \text{---} \\ 1/2 \end{array}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} 8 \sin x \right] = ? \quad 4$$

* تمرین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} [5x] + [-5x] =$$

هنگام درگاه جدید تابع کسره، غرض کسره صطلقه باشد، جواب حد ندارد وجود ندارد است

انرا محدود ندارم

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{[x-3]} = ? \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{[x^2]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - [x]^2}{1 - [x]} = ? \quad \begin{cases} x \rightarrow 1^+ & \text{, line} \\ x \rightarrow 1^- & 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} [x] = ? \quad \frac{-(x-3)}{x-3} \underbrace{[3^-]}_2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{[x]} \operatorname{sgn}(x+1) = ? \quad -1$$

$$f(x) = \left[\frac{4x^2 + \overbrace{3+1}^4 - 1}{x^2 + 1} \right] = \left[\frac{4(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} \right] = \left[\underbrace{4}_{\text{تابع در تمامی نقاط حد دارد}} - \frac{1}{x^2 + 1} \right] = 4 + \underbrace{\left[\frac{-1}{x^2 + 1} \right]}_{-1} = 3$$

$x^2 \geq 0 \quad x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{-1}{x^2 + 1} \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x-1]}{x-[x]} = ?$$

$$\frac{0 \text{ معلق}}{0 \text{ حاد}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2] - x^2}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \cos x}{3^x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sqrt[4]{\cot x - 1}$$

$$f(x) = \frac{(3 - [x]) \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

صورت لری میبیم

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \times \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$\frac{0}{0} - 1$$

باید رفع ابهام
 1- حد بی نهایت ← مشتق
 2- حدت عامل منفرد کننده ✓
 3- هم ارز ✓

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cancel{\cos x})(1 + \cos^2 x - \cos x)}{(1 + \cancel{\cos x})(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \frac{0}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{|\cos \frac{x}{2}| \times \sqrt{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1} + x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1} + (x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + 1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}[\sqrt{x-1} + x+1]}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 1 + x)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x (1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\sin^2 x (1 - \sin x)} = \frac{2}{1} = 2$$

$\nearrow 1 - \sin^2 x$

$$\underbrace{f(x) \sim g(x)}_{x=a \text{ limit}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$x \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \tan x \sim x \\ \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$$

همانطور

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ? \quad \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\overset{u}{\cot x})}{\cot x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{3x^2 \sin x} = \frac{x \cdot 2x \cdot 3x}{3x^2 \cdot x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{(2x)^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$$\lim \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\tan^2 \frac{x}{2}} = 8$$

$$1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2x)^2}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 8$$

$$\tan v \sim v$$

$$\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2}{(x - \frac{\pi}{4})^2}}{(x - \frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} = ? \quad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(\arccos x)^2} = ? = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\alpha^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4$$

$$\arccos x = \alpha$$

$$\cos \alpha = x$$

$$\boxed{\cos u \sim 1 - \frac{1}{2}u^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{(1 - \tan x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{3x^2}{2})}{(1 - x)x} = \frac{\frac{3x}{2}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2(1 - x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5} = ?$$

بطاكر لكون

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \tan x = x + \frac{x^3}{3} \\ \cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5} = ? \quad \frac{\overbrace{x - \frac{x^3}{6}}^{x - \frac{x^3}{6}} \underbrace{(x^2 + \sin^2 x + x \sin x)}_{\sim x^2 + x^2} }{x^5} = \frac{(\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6})(3x^2)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^5}{x^5} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - (x - \frac{x^3}{6})}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - x^3}{\tan^9 x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = ? \quad \frac{1}{120}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

* مهم

$$\lim \frac{\sinh x - \tan x}{x(e^{x^2} - 1)} =$$

$$\lim \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

صورت ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{5x+3}} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\underbrace{\sqrt{5x}}_{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+3x} + 4x} = ? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{\underbrace{|x|+4x}_{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

قوانین رشد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \uparrow = 0$$

$$b > a > 1 \quad \alpha, \beta > 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$b^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^\beta$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \infty$$

قوانین حد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$b > a > 1 \quad \alpha, \beta > 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$b^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^\beta$$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^6 + 4^{x+1} + 2^{x-1}}{4^{x-1} + 3^x + \log x}} = \frac{4^{x+1}}{4^{x-1}} = 4^2 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cot(x - \frac{1}{2})}{\tan \pi x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{\tan \pi x}}{\frac{1}{\cot(x - \frac{1}{2})}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cot \pi x}{\tan(x - \frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{حل به روش هسپیتال}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x}}{e^{3x} + x^{100} - \log x} = ?$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{x+2} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+5+x-1}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} =$$

رفع ابرهام $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\underbrace{4x^2}_a + \underbrace{4x+1}_b} - \sqrt{\underbrace{4x^2}_a - \underbrace{16x+2}_b} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{if } n \\ \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & \text{if } n \end{cases}$$

$$\sqrt{4} \left| x + \frac{4}{2 \times 4} \right| - \sqrt{4} \left| x - \frac{16}{2 \times 4} \right| = 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| - 2 \left| x - 2 \right| = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) - 2(x - 2) = 5$$

رفع الباعث $0 \times \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{3\sqrt{x}} \text{ Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)$$

$\underbrace{\sin \frac{1}{3\sqrt{x}}}_{f(x)} \quad \underbrace{\text{Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)}_{\infty}$

$$0 \times \infty \quad \frac{1}{\text{Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{3\sqrt{x}}}{\tan \frac{3\sqrt{x}}{x+5}}$$

$$\frac{\frac{1}{3\sqrt{x}}}{\frac{3\sqrt{x}}{x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{9x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x}{9x} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 4x \cot 2x - \sin 4x \cot x) = \underline{\underline{-2}}$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{f(x)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\rightarrow \infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} e^{(f(x)-1)g(x)}$$

$\pm \infty$ مبر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1+x)}_{f(x)}^{\underbrace{g(x)=\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1+x-1)\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow e^{-4}$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{e}$$

رفع الباعث ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = 1^\infty \Rightarrow e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = 1^\infty \Rightarrow e^2$$

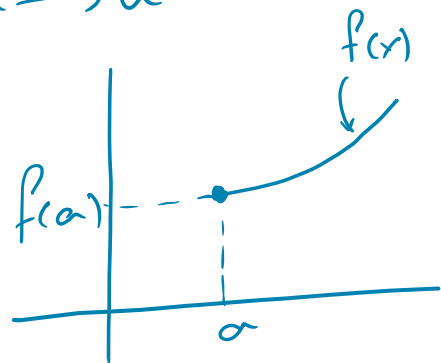
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{5x})^{\frac{2}{x^2}} \Rightarrow e^{-5}$$

$$f(x) = g(x) = [1 - x^2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = ?$$

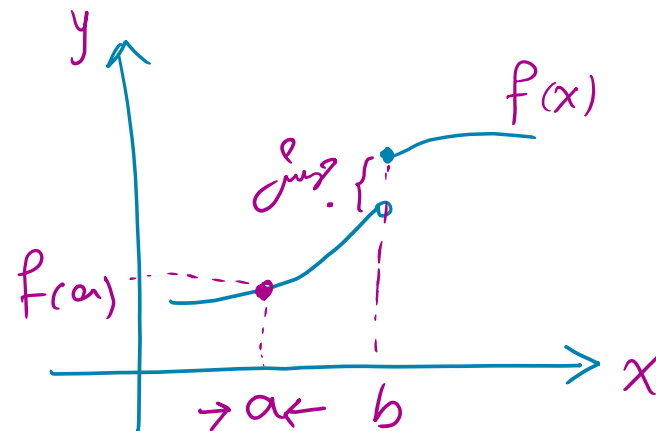
$$\lim_{x \rightarrow 1} \overbrace{[1 - x^2]}^{f(x)} \begin{cases} x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim [0^-] = -1 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim [0^+] = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \text{تابع پیوسته}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ پیوستگی راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ چپ}$$



پیوستگی

$$\Rightarrow [a, b] \Rightarrow \begin{array}{l} \text{پیوسته} \\ (a, b) \\ \text{پیوستگی از راست} \\ a \\ \text{از چپ} \\ b \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

آیا تابع در $x=0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underbrace{f(0)}_{-1} \Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ پیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

آیا در $x=2$ تابع پیوسته است؟

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1-x} - \sqrt[4]{1-x}} \quad x=1$$

* نماین: پیوسته تابع در $x=1$ بررسی شود

نکته: توابع زیر در دامنه خود پیوسته هستند

۱- چند جمله ای

۲- توابع مثلثاتی

۳- توابع نمایی

۴- توابع لگاریتمی

۵- توابع هیپر بولیک

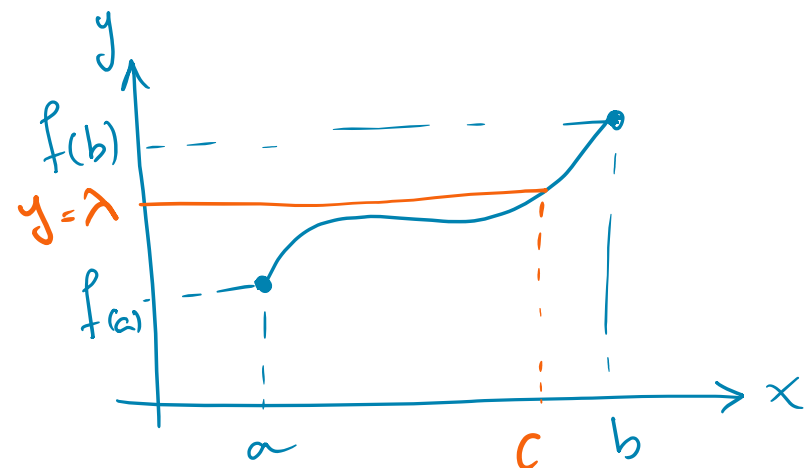
* نکته: تابع معکوس توابع بالا نیز در دامنه (دامنه تابع معکوس) پیوسته هستند

* $f(x) = [x^2]$ در چند نقطه از بازه $(2, -1)$ ناپیوسته است

قضیه مقدار میانگین

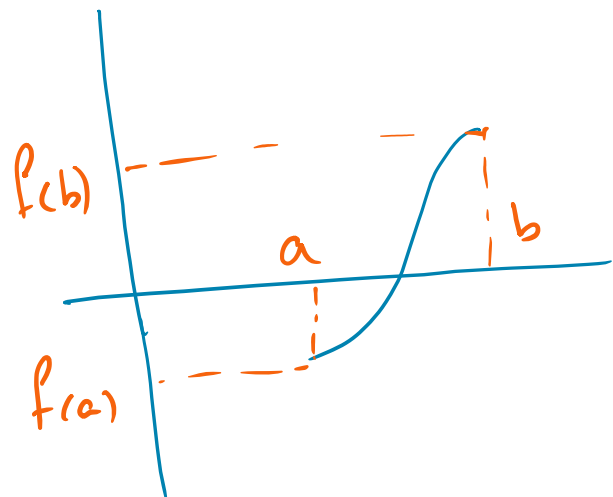
فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$
 آنگاه عدد c در بازه $a \leq c \leq b$ موجود است به طوری که $f(c) = \lambda$

$$f(c) = \lambda$$

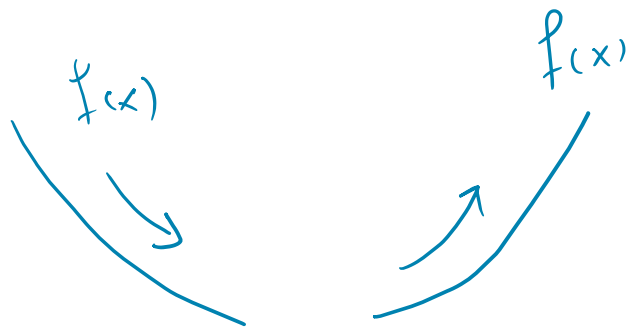


کاربرد قضیه مقدار میانگین

اگر $f(a) < f(b)$ تابع در بازه $[a, b]$ پیوسته و در این بازه تابع
 حداقل دارا یک ریشه خواهد بود

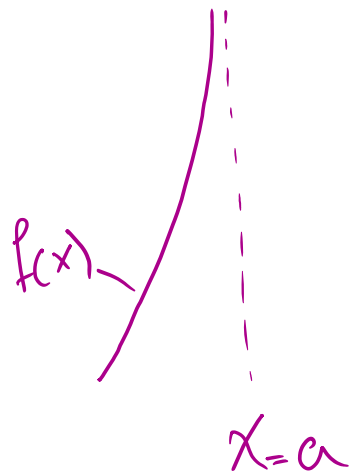


* آیا معادله $3^x = 5x$ در بازه $[1, 2]$ دارا جواب است ؟



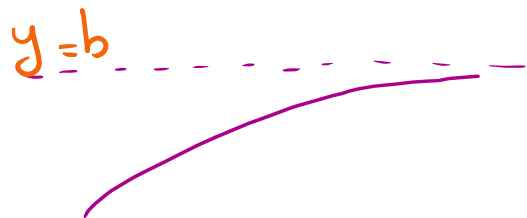
نکته: فرض کنید $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته و یکنواخت اکسید باشد

یکنواخت اکسید $\Rightarrow$ $\begin{cases} f(a) f(b) \leq 0 \Rightarrow [a, b] \text{ دقیقاً دارای یک ریشه است} \\ f(a) f(b) > 0 \Rightarrow [a, b] \text{ فاقد ریشه است} \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

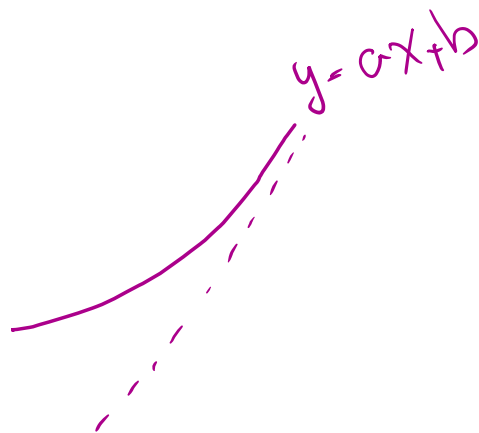
جانب قائم



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

جانب انقصر



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

جانب مایل

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$$

جانب

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) \\ x = -1 \Rightarrow \frac{-2}{0} = \infty \checkmark \end{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \times$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \\ y &= \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}} \end{aligned} \right\} \text{جانب ابرسر سر}$$

* تمرین

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 6x + 1} \quad \text{* تمرین}$$

طرح جانب را بدست آورید

صفت

اگر تابع f در هر یک از نقاط تعریف شده باشد

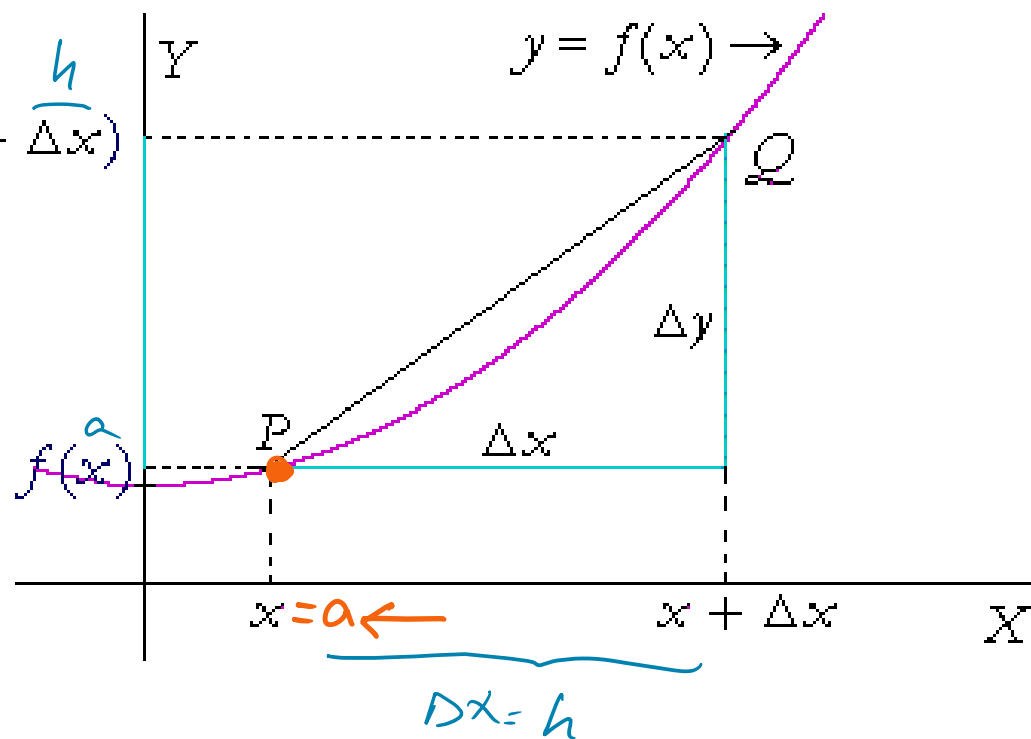
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \text{وقتی } x \text{ به } a \text{ نزدیک و نزدیک تر شود}$$

$f'(a)$ شیب تابع در نقطه a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) \sim \frac{dy}{dx} \sim y'$$

Δy



اگر تابع در $x=0$

$$f(x) = x[\sin x]$$

مشتق نپذیر هست یا نه

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sin x] - 0}{x - 0}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x] = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [\sin x] = -1 \end{aligned} \right\}$$

مشتق عدد ثابت = صفر است $\Rightarrow \frac{dc}{dx} = 0$

ثابت $\downarrow$
 $y = c$

1) $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

2) $\frac{d}{dx} x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n x^{n-1} \Rightarrow y = k x^n \Rightarrow y' = k n x^{n-1}$

قضیه: اگر f در a مشتق نپذیر باشد، نگاه f در a پیوسته است $\Rightarrow$

اگر f در a نابسته باشد، نگاه f در a مشتق نپذیر فراموش

شرط مشتق نپذیر آن است که

$$f'_+(a) \neq f'_-(a)$$

* فرمول مشتق گیری

$$3) y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a \xrightarrow{\text{مثال}} y = 2^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \quad y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

* مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f'(x) = ?$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

تعریف اولی

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + \left(\boxed{} \right)' x x^2 & \\ 0 & \end{cases}$$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

$f'(0) =$ موجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

مثال: این تابع در نقطه مشتق پذیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

* توابعی که در اعداد گویا دلتا در مقابل مشتق متناوب دارند فقط در نقاط حد دارند یا بیرون اند که در مقابل با هم صادر باشند

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{مشتق نا پذیر و نا پیوسته} \quad \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow 0$$

مثال: مقادیر پارامتر a و b را طوری بیست آورید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \leq 1 \\ \frac{b}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

کافیه است در $x=1$ مشتق پذیر بدین صورت
الف - ابتدا پیوستگی را بدین صورت بنویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{b}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a+1 \Rightarrow \boxed{\frac{b}{2} = a+1}$$

$$\frac{b}{2} = a + 1$$

از این دستگی

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ \frac{-b}{(x+1)^2} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_+(1) = \frac{-b}{4} \\ f'_-(1) = 2a \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{-b}{4} = 2a}$$
از این دستگی

$$\begin{cases} 2a + \frac{b}{4} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{8}{5} \end{matrix}$$

فرمول‌های مشتق

$$1) y = C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2) y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n x^{n-1} \Rightarrow y = u^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n \times u' \times u^{n-1}$$

$$3) y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln(a) \Rightarrow y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{\ln e}{1} = e^x$$

$$4) y = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \times \ln a} \quad y = \log_a u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u \times \ln a} \Rightarrow y = \log_e x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \times \ln e} = \frac{1}{x}$$

$\log_e x \Rightarrow a$

$$5) y = |u| \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = u' \times \frac{u}{|u|} = \frac{u \times u'}{|u|}$$

نسبت به u

$$6) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y = \sqrt[m]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

$$7) y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

* u یک عبارت بر حسب x

$$8) y = \begin{cases} \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u \\ \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u \\ \tan u \Rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u) \\ \cot u \Rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u) \end{cases} \Rightarrow y = \sin \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x}$$

$$9) y = \begin{cases} \sin^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \cos^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}$$

$$\tan^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\cot^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

مثال: مشتق تابع $y = x^x$ را حساب کنید.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} \times x = 1 + \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = (1 + \ln x)y = (1 + \ln x)x^x$$

مثال:

$$f(x) = \frac{(x+2)^3 (x^2+1)^4}{(x^3+1)^2}, \quad f'(1) = ? \Rightarrow \ln f(x) = 3 \ln(x+2) + 4 \ln(x^2+1) - 2 \ln(x^3+1)$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \times \frac{1}{x+2} + 4 \times \frac{2x}{x^2+1} - 2 \times \frac{3x^2}{x^3+1}$$

$$y'(1) = y \times \boxed{} = 216$$

نکته: در موارد زیر برای محاسبه $f'(x)$ ابتدا $\ln f(x)$ را تمایز دهید و سپس از آن مشتق بگیرید.

1- $f(x) = u(x)$

2- اگر $f(x)$ به صورت ضرب یا تقسیم تعداد زیادی تابع باشد

* مشتق ضمنی

$$\underbrace{x^2 + y^2 + 5xy = \sin y}_{\text{یک عبارت ضمنی}} \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

* مشتق پارامتر

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

* قاعده مشتق زنجیره‌ای

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1} \Rightarrow a = f^{-1}(b)$$

* مشتق از تابع وارون

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad f'(a) \neq 0$$