

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۱- حد

۲- پیوستگی

۳- مشتق

۴- انتگرال

۵- نقاط تقاطع

۶- اعداد مختلط

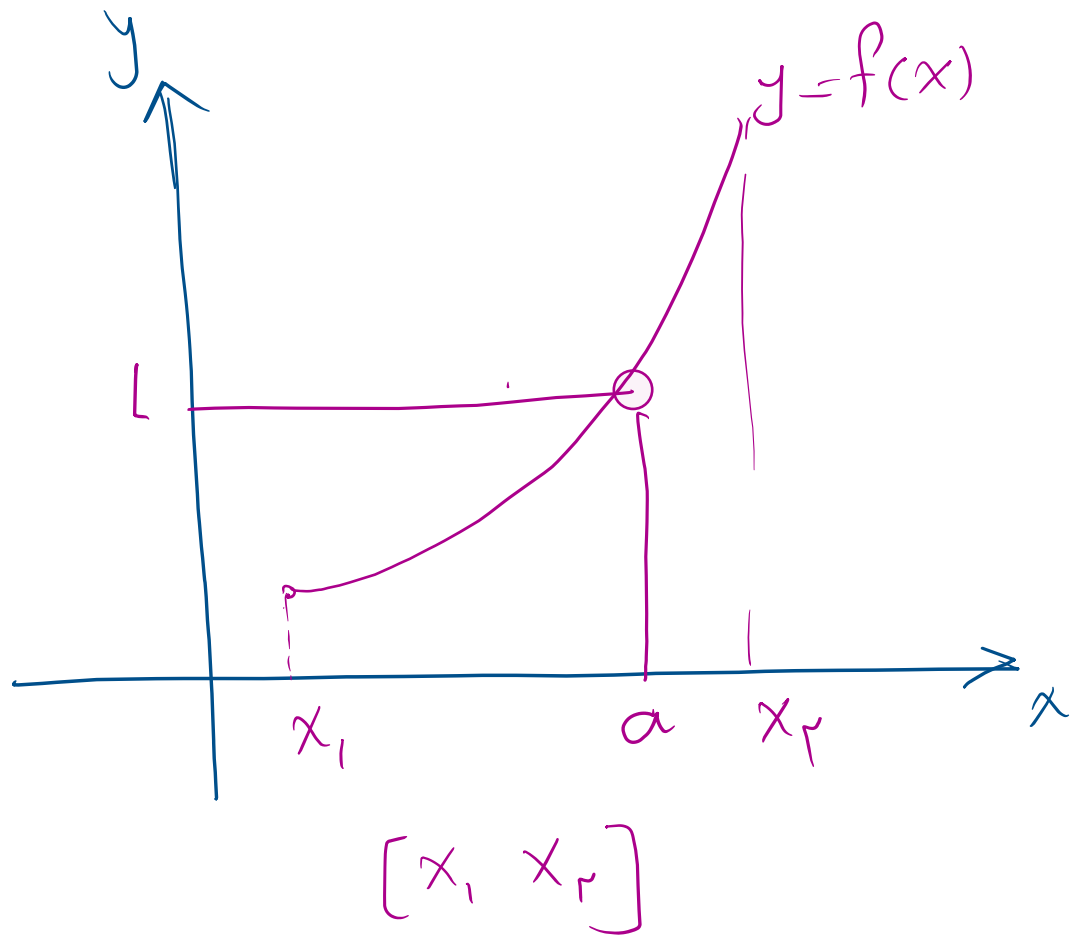
۷- دنباله و سری

۶/۲۰/۱۴۰۳ = تاریخ امتحان

حضور و غیاب داخل المپیک هست

file → upload

الحل

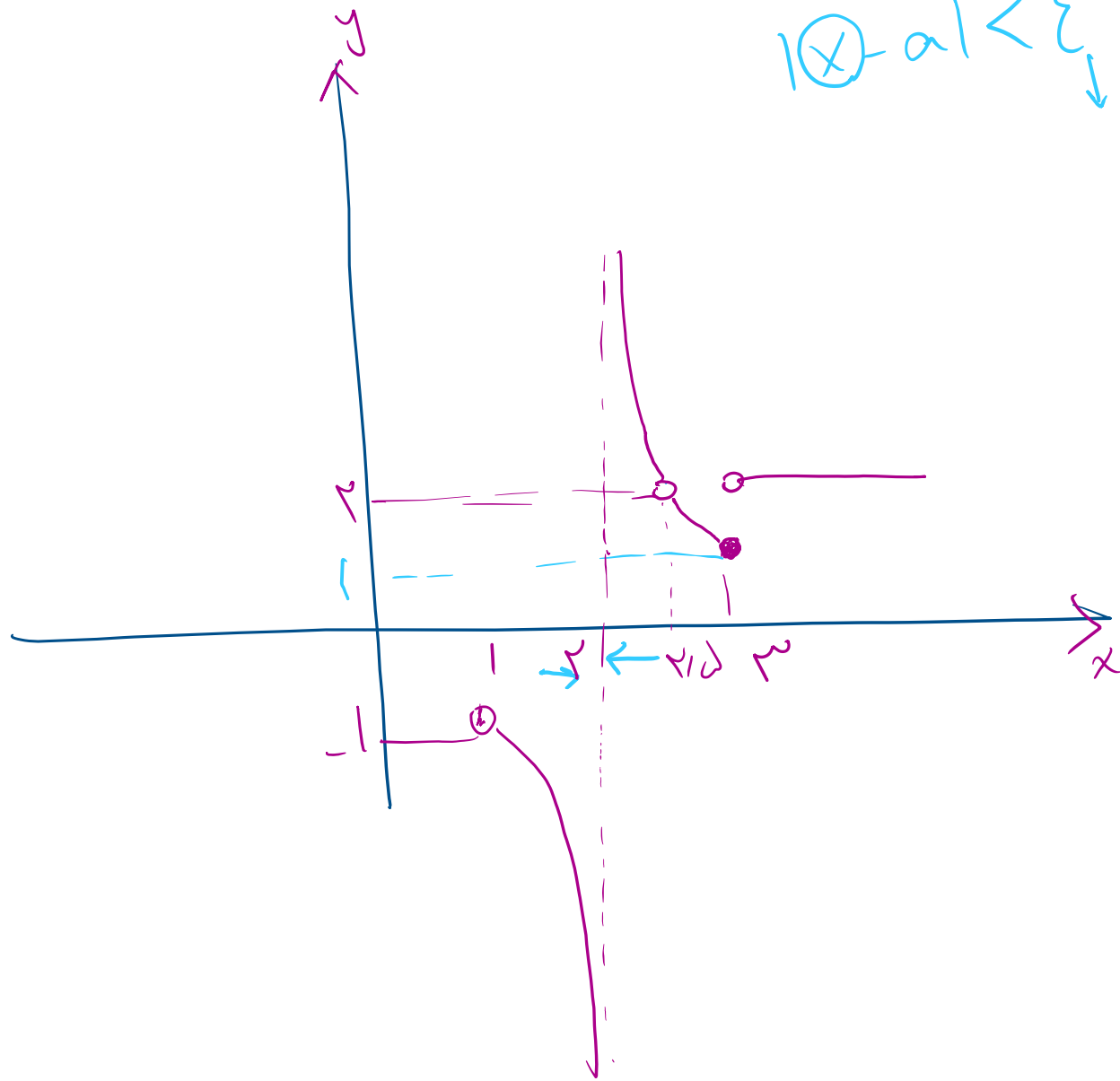


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

} $l_1 = l_2 \Rightarrow f(x)$ يتقارب
نحو a ،
نحو l



$$1 \otimes a < \varepsilon$$

حد برابر 2 است

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ? \begin{cases} x \rightarrow 2^+ = +\infty \\ x \rightarrow 2^- = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow 3^- = 1 \\ x \rightarrow 3^+ = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) = \begin{cases} x \rightarrow 2.5^- \Rightarrow f(x) = 1 \\ x \rightarrow 2.5^+ \Rightarrow f(x) = 2 \end{cases}$$

حد برابر 2 است

$$\lim_{x \rightarrow \textcircled{1}} \sqrt{x-1} = ? \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

$[1 \quad \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = l^n$$

قواعد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l_1 \times l_2 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l_1}{l_2} \end{array} \right.$$

$l_2 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} = ?$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$x \rightarrow 2^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$x \rightarrow 2^-$$

تابع حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \text{موجود}$$

$\Rightarrow$

$$\lim (f+g)(x) = ? \quad \text{موجود}$$

$$\lim (f-g)(x) = ? \quad //$$

$$\lim \left(\frac{g}{f} \right)(x) = ? \quad //$$

$$\lim \left(\frac{f}{g} \right)(x) = ?$$

$$\lim (f \cdot g)(x) = ?$$

ممكن ان تكون f و g صفر
ممكن ان تكون g صفر

قضیه فشردگی با ساندیج

$$\overbrace{f(x)} \leq \overbrace{g(x)} \leq \overbrace{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \overbrace{x \sin \frac{1}{x}} = ?$$

$$\begin{array}{c} -1 < \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{f(x)} \leq 1 \Rightarrow -x \leq \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \underbrace{x}_{h(x)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{-x}_{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x \sin \frac{1}{x}}_{g(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{h(x)} \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \qquad\qquad\qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \qquad\qquad\qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_0 \end{array}$$

حد برابر با صفر است

قضیه کیدان داره

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \text{محدود}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = ?$$

تابع $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ محدود است
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

تمرین

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \sin \frac{1}{x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin^2 x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{|x|} = ? \quad \text{تمرین}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega \left(\frac{-1}{x^2} \right) = ? \quad -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-4}{x+2} \underbrace{\text{sgn}(x+2)}_{-1} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} (-1) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2-x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3x-1) - (3x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x}{x} = -6$$

lim)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{x+1} & x \in \mathbb{Z} \times \\ \frac{5}{x^2+1} & \checkmark x \notin \mathbb{Z} \checkmark \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x^2+1} = 2,5$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \checkmark \\ -\sqrt{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = ?$$

$$x^3 - x \Rightarrow x(x^2 - 1) = +$$

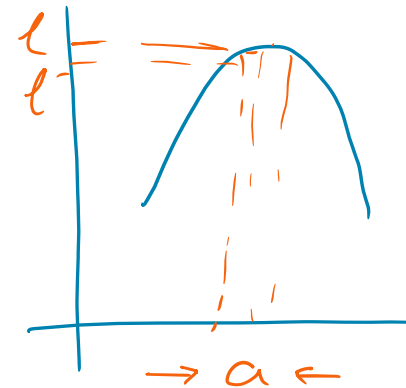
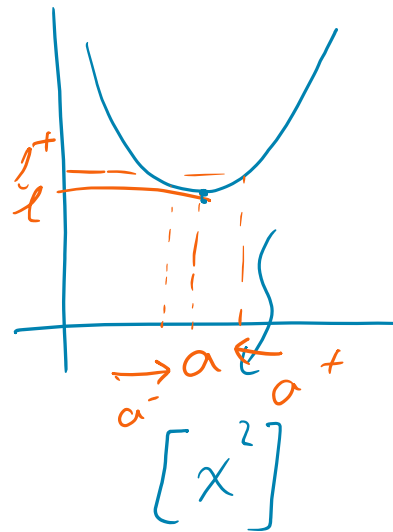
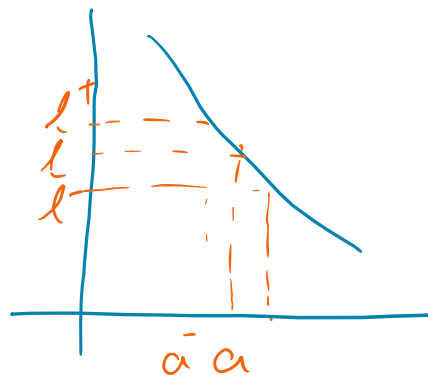
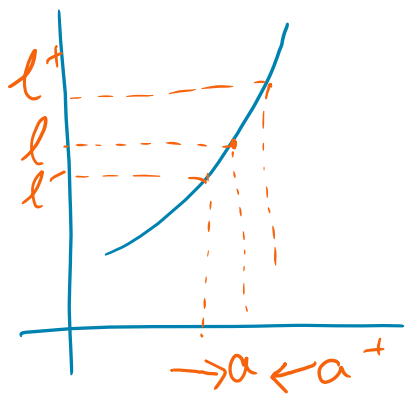
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} [x] = \begin{cases} x \rightarrow 3^+ \Rightarrow \lim f(x) = 3 \\ x \rightarrow 3^- \Rightarrow \lim f(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{, lim} \quad | \quad \lim_{x \rightarrow 3/2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = l$$

$$a \begin{cases} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim f(x) \rightarrow \text{ندار؟} \\ \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim f(x) = \text{حد دارد} \end{cases}$$



$$f(x) = [x^2] \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0^+ \rightarrow 0 \\ 0^- \rightarrow 0 \end{cases}$$

به طرک مکرر می‌توانیم حد داخل بدین مقدار جمع شود
تابع حد ندارد مگر آنکه در آن نقطه تابع از حد پیروی کند

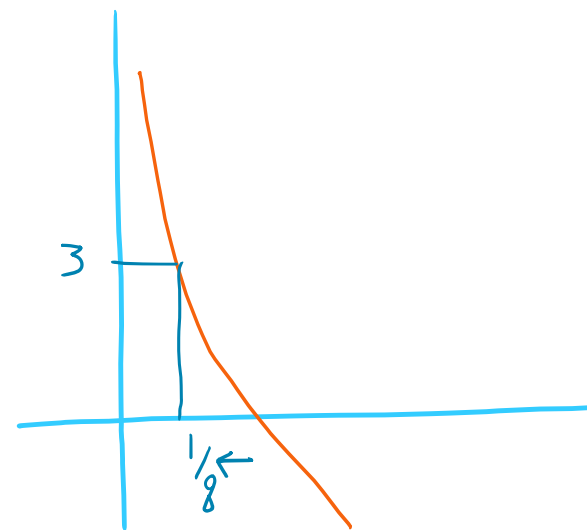
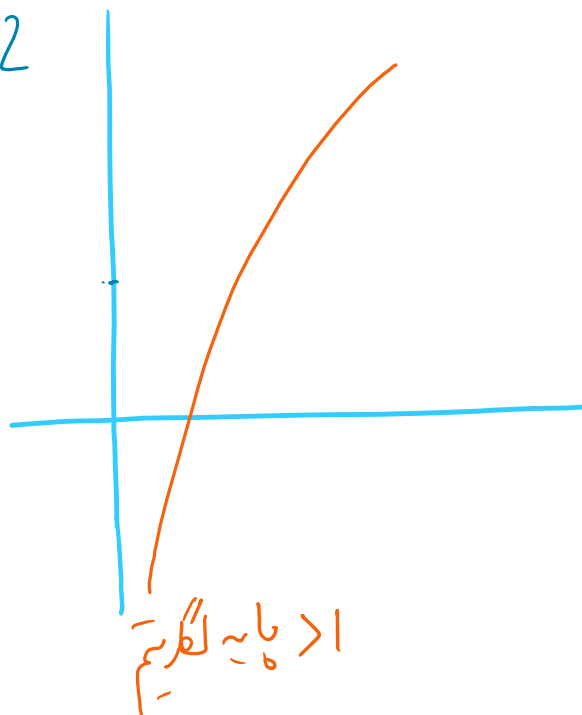
$$(-2, 2)$$

در چند نقطه حد ندارد

$$x^2 = k \Rightarrow x = \pm \sqrt{k} \\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{1}, 0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{8}^+} \left[\log^x \left(\frac{1}{2} \right) \right] = ? \quad [3^-] = 2$$



$$\begin{array}{c} 4^+ \\ \text{---} \\ 4^- \\ \text{---} \\ 1/2 \end{array}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} 8 \sin x \right] = ? \quad 4$$

* تمرین

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} [5x] + [-5x] =$$

انزاعاً حد ندارم

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{[x-3]} = ? \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{[x^2]}$$

هرگاه در کاسه حد یک تابع کسری، مخارج کسر صفر شوند، جواب حد انزاعاً وجود ندارد است

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - [x]^2}{1 - [x]} = ? \quad \begin{cases} x \rightarrow 1^+ & \text{, line} \\ x \rightarrow 1^- & 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} [x] = ? \quad \frac{-(x-3)}{x-3} \underbrace{[3^-]}_2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{[x]} \operatorname{sgn}(x+1) = ? \quad -1$$

$$f(x) = \left[\frac{4x^2 + \overbrace{3+1}^4 - 1}{x^2 + 1} \right] = \left[\frac{4(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} \right] = \left[\underbrace{4}_{\text{تابع در تمامی نقاط حد دارد}} - \frac{1}{x^2 + 1} \right] = 4 + \underbrace{\left[\frac{-1}{x^2 + 1} \right]}_{-1} = 3$$

$x^2 \geq 0 \quad x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{-1}{x^2 + 1} \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x-1]}{x-[x]} = ?$$

$$\frac{0 \text{ مطلق}}{0 \text{ حاد}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2] - x^2}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \cos x}{3^x - 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sqrt[4]{\cot x - 1}$$

$$f(x) = \frac{(3 - [x]) \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

صورت ل'Hôpital

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \times \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

$$\frac{0}{0} - 1$$

باید رفع ابهام
 1- حد بی‌نهایت ← مشتق
 2- حد ثابت حاصل می‌گردد ✓
 3- هم‌ارز ✓

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cancel{\cos x})(1 + \cos^2 x - \cos x)}{(1 + \cancel{\cos x})(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \frac{0}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{|\cos \frac{x}{2}| \times \sqrt{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sqrt{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1} + x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1} + (x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + 1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}[\sqrt{x-1} + x+1]}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 1 + x)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x (1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\sin^2 x (1 - \sin x)} = \frac{2}{1} = 2$$

$\nearrow 1 - \sin^2 x$

$$\underbrace{f(x) \sim g(x)}_{x=a \text{ limit}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$x \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \tan x \sim x \\ \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$$

همانند

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ? \quad \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\overset{u}{\cot x})}{\cot x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x}{3x^2 \sin x} = \frac{x \cdot 2x \cdot 3x}{3x^2 \cdot x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{(2x)^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\tan^2 \frac{x}{2}} = 8$$

$$1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2x)^2}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 8$$

$$\tan v \sim v$$

$$\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\tan^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2}{2}}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} = ? \quad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(\arccos x)^2} = ? = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\alpha^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4$$

$$\arccos x = \alpha$$

$$\cos \alpha = x$$

$$\boxed{\cos u \sim 1 - \frac{1}{2}u^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{(1 - \tan x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{3x^2}{2})}{(1 - x)x} = \frac{\frac{3x}{2}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2(1 - x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5} = ?$$

بطاكر لكون

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \tan x = x + \frac{x^3}{3} \\ \cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5} = ? \quad \frac{\overbrace{x - \frac{x^3}{6}}^{x - \frac{x^3}{6}} (\underbrace{x^2}_{\sim x^2} + \underbrace{\sin^2 x}_{\sim x^2} + \underbrace{x \sin x}_{\sim x^2})}{x^5} = \frac{(\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6})(3x^2)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^5}{x^5} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - (x - \frac{x^3}{6})}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - x^3}{\tan^9 x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = ? \quad \frac{1}{120}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

* مهم

$$\lim \frac{\sinh x - \tan x}{x(e^{x^2} - 1)} =$$

$$\lim \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

صورت ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{5x+3}} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\underbrace{\sqrt{5x}}_{\sqrt{5} \cdot \cancel{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+3x} + 4x} = ? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{\underbrace{|x|+4x}_{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

قوانین رشد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = ? \quad \frac{\infty}{\infty} \uparrow = 0$$

$$b > a > 1 \quad \alpha, \beta > 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$b^x > a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^\beta$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \infty$$

قوانین حد

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$b > a > 1 \quad \alpha, \beta > 0 \quad x \rightarrow \infty$$

$$b^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^\beta$$

$$\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^6 + 4^{x+1} + 2^{x-1}}{4^{x-1} + 3^x + \log x}} = \frac{4^{x+1}}{4^{x-1}} = 4^2 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cot(x - \frac{1}{2})}{\tan \pi x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{\tan \pi x}}{\frac{1}{\cot(x - \frac{1}{2})}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cot \pi x}{\tan(x - \frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{حل به روش هسپیتال}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x}}{e^{3x} + x^{100} - \log x} = ?$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} + \frac{1}{x+2} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+5+x-1}{(x-1)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} =$$

رفع ابرهام $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) \times \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = 0$$

$x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\underbrace{4x^2}_a + \underbrace{4x+1}_b} - \sqrt{\underbrace{4x^2}_a - \underbrace{16x+2}_b} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{if } n \text{ is odd} \\ \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

$$\sqrt{4} \left| x + \frac{4}{2 \times 4} \right| - \sqrt{4} \left| x - \frac{16}{2 \times 4} \right| = 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| - 2 \left| x - 2 \right| = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) - 2(x - 2) = 5$$

رفع الباعث $0 \times \infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{3\sqrt{x}} \text{ Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)$$

$\underbrace{\sin \frac{1}{3\sqrt{x}}}_{f(x)} \quad \underbrace{\text{Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)}_{\infty}$

$$0 \times \infty \quad \frac{1}{\text{Cot } \left(\frac{3\sqrt{x}}{x+5} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{3\sqrt{x}}}{\tan \frac{3\sqrt{x}}{x+5}}$$

$$\frac{\frac{1}{3\sqrt{x}}}{\frac{3\sqrt{x}}{x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{9x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x}{9x} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 4x \cot 2x - \sin 4x \cot x) = \underline{\underline{-2}}$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{f(x)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{g(x)}_{\rightarrow \infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} e^{(f(x)-1)g(x)}$$

$\pm \infty$ مبر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1+x)}_{f(x)}^{\underbrace{g(x)=\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{(1+x-1)\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow e^{-4}$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{e}$$

رفع الباء ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = 1^\infty \Rightarrow e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = 1^\infty \Rightarrow e^2$$

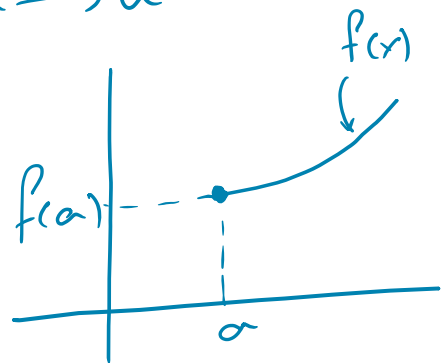
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{5x})^{\frac{2}{x^2}} \Rightarrow e^{-5}$$

$$f(x) = g(x) = [1 - x^2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = ?$$

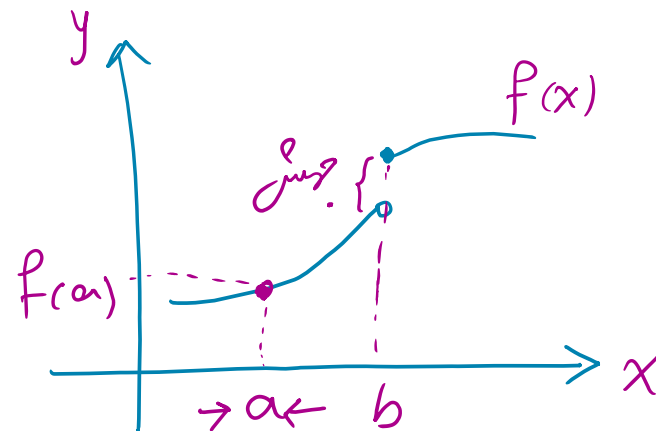
$$\lim_{x \rightarrow 1} \overbrace{[1 - x^2]}^{f(x)} \begin{cases} x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim [0^-] = -1 \Rightarrow g \circ f(x) = 0 \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim [0^+] = 0 \Rightarrow g \circ f(x) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow \text{تابع پیوسته}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ پیوستگی راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ چپ}$$



پیوستگی

$\Rightarrow [a, b] \Rightarrow$ پیوسته (a, b)
 پیوستگی از راست a
 پیوستگی از چپ b

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

آیا تابع در $x=0$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underbrace{f(0)}_{-1} \Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ پیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

آیا در $x=2$ تابع پیوسته است؟

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1-x} - \sqrt[4]{1-x}} \quad x=1$$

* نکته: پیوستگی تابع در $x=1$ بررسی شود

نکته: توابع زیر در دامنه خود پیوسته هستند

۱- چند جمله ای

۲- توابع مثلثاتی

۳- توابع نمایی

۴- توابع لگاریتمی

۵- توابع هیپر بولیک

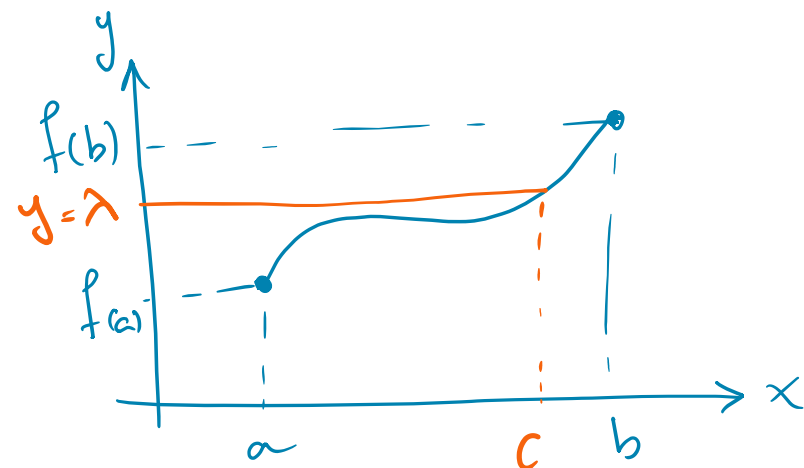
* نکته: تابع معکوس توابع بالا نیز در دامنه (دامنه تابع معکوس) پیوسته هستند

* $f(x) = [x^2]$ در چند نقطه از بازه $(2, -1)$ ناپیوسته است

قضیه مقدار میانگین

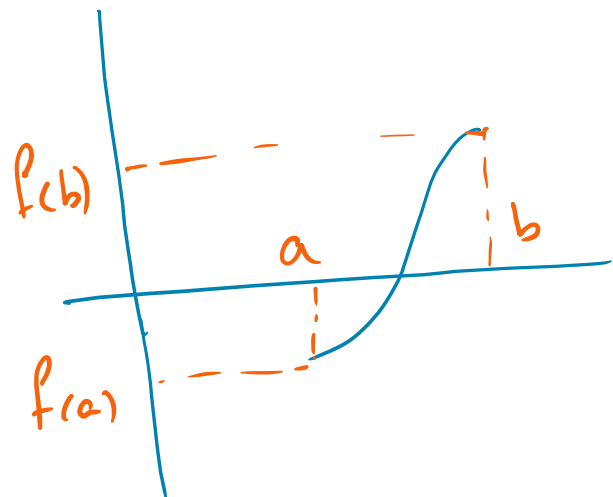
فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$
 آنگاه عدد c در بازه $a \leq c \leq b$ موجود است به طوری که $f(c) = \lambda$

$$f(c) = \lambda$$

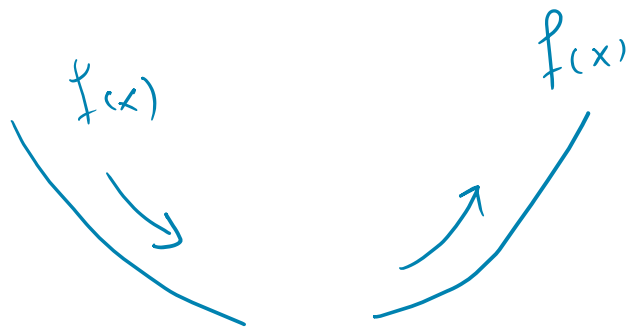


کاربرد قضیه مقدار میانگین

اگر $f(a) < f(b)$ در تابع در بازه $[a, b]$ پیوسته $\Rightarrow$ در این بازه تابع
 حداقل دارا یک ریشه خواهد بود



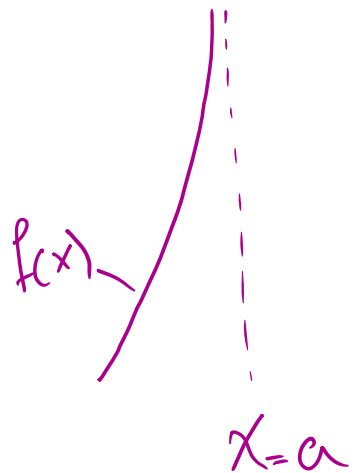
* آیا معادله $3^x = 5x$ در بازه $[1, 2]$ دارا جواب است ؟



نکته: فرض کنید $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته و یکنواخت اکتدبانه

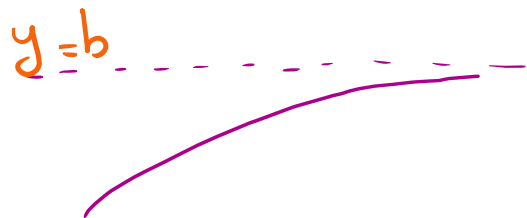
دقیقاً برابر یک عدد است $\Rightarrow [a, b] \Rightarrow f(a) f(b) \leq 0$

$\Rightarrow$ یکنواخت اکتدبانه $\left\{ \begin{array}{l} f(a) f(b) > 0 \Rightarrow [a, b] \Rightarrow \text{فاقد ریشه است} \end{array} \right.$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

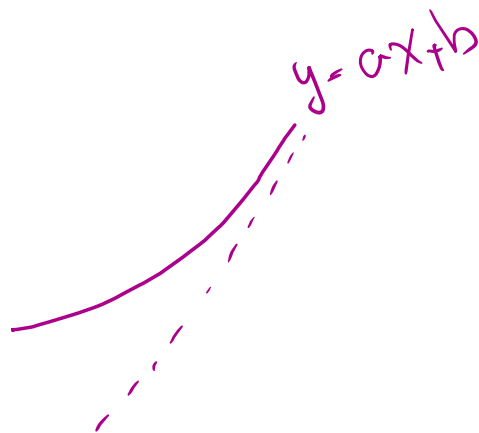
جانب قائم



$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$$

$$x \rightarrow \pm \infty$$

جانب انقصر



$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

$$x \rightarrow \pm \infty$$

جانب مایل

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - ax)$$

جانب

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right) \\ x = -1 \Rightarrow \frac{-2}{0} = \infty \checkmark \end{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \times$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

جانب ابرسر سرد

* تمرین

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 6x + 1}$$

* تمرین

طرح جانب را بدست آورید

صفت

اگر تابع f در هر یک از نقاط تعریف شده باشد

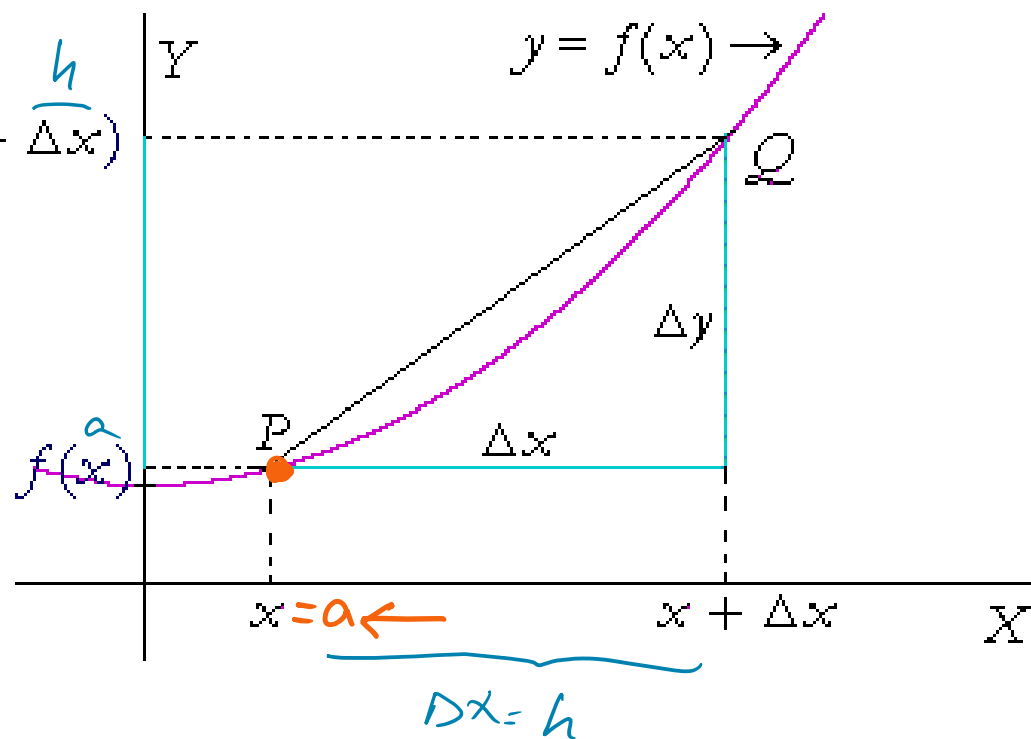
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \text{وقتی } x \text{ به } a \text{ نزدیک و نزدیک تر شود}$$

$f'(a)$ شیب تابع در نقطه a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) \sim \frac{dy}{dx} \sim y'$$

Δy



اگر تابع در $x=0$

$$f(x) = x[\sin x]$$

مشتق نپذیر هست یا نه

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sin x] - 0}{x - 0}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x] = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [\sin x] = -1 \end{aligned} \right\}$$

مشتق عدد ثابت = صفر است $\Rightarrow \frac{dc}{dx} = 0$

ثابت $\downarrow$
 $y = c$

1) $\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

2) $\frac{d}{dx} x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n x^{n-1} \Rightarrow y = k x^n \Rightarrow y' = k n x^{n-1}$

قضیه: اگر f در a مشتق نپذیر باشد، نگاه f در a پیوسته است $\Rightarrow$

اگر f در a نابسته باشد، نگاه f در a مشتق نپذیر فراموش

شرط مشتق نپذیر آن است که

$$f'_+(a) \neq f'_-(a)$$

* فرمول مشتق گیری

$$3) y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a \xrightarrow{\text{مثال}} y = 2^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \quad y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

* مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f'(x) = ?$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

تعریف اولی

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + \left(\boxed{\phantom{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}} \right) \times x^2 \\ 0 \end{cases}$$

$-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

$$\underline{f'(0) = \text{وجود ندارد}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

مثال: این تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

* توابعی که در اعداد گویا دگرنگ در مقابل هر متناوب دارند فقط در نقاط حد دارند یا بی‌نهایت اند که در مقابل با هم صاف باشند

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{مشتق ناپذیر و نا بی‌نهایت} \quad \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) \Rightarrow 0$$

مثال) مقادیر پارامتر a و b را طوری بیست آورید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \leq 1 \\ \frac{b}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

کافز است در $x=1$ مشتق پذیر بدین صورت
الف - ابتدا پیوستگی را بررسی می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{b}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a+1 \Rightarrow \boxed{\frac{b}{2} = a+1}$$

$$\frac{b}{2} = a + 1$$

از اینجاست

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ \frac{-b}{(x+1)^2} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_+(1) = \frac{-b}{4} \\ f'_-(1) = 2a \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{-b}{4} = 2a}$$

از اینجاست

$$\begin{cases} 2a + \frac{b}{4} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{8}{5} \end{matrix}$$

فرمول‌های مشتق

$$1) y = C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2) y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n x^{n-1} \Rightarrow y = u^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n \times u' \times u^{n-1}$$

$$3) y = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln(a) \Rightarrow y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{\ln e}{1} = e^x$$

$$4) y = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \times \ln a} \quad y = \log_a u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u \times \ln a} \Rightarrow y = \log_e x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \times \ln e} = \frac{1}{x}$$

$\log_e x \Rightarrow a$

$$5) y = |u| \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = u' \times \frac{u}{|u|} = \frac{u \times u'}{|u|}$$

نسبت به u

$$6) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \Rightarrow y = \sqrt[m]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

$$7) y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

* u یک عبارت بر حسب x

$$8) y = \begin{cases} \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u \\ \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u \\ \tan u \Rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u) \\ \cot u \Rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u) \end{cases} \Rightarrow y = \sin \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \times \cos \frac{1}{x}$$

$$9) y = \begin{cases} \sin^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\ \cos^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}$$

$$\tan^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\cot^{-1} u \Rightarrow f' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

مثال: مشتق تابع $y = x^x$ را حساب کنید.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} \times x = 1 + \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = (1 + \ln x)y = (1 + \ln x)x^x$$

مثال:

$$f(x) = \frac{(x+2)^3 (x^2+1)^4}{(x^3+1)^2}, \quad f'(1) = ? \Rightarrow \ln f(x) = 3 \ln(x+2) + 4 \ln(x^2+1) - 2 \ln(x^3+1)$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \times \frac{1}{x+2} + 4 \times \frac{2x}{x^2+1} - 2 \times \frac{3x^2}{x^3+1}$$

$$y'(1) = y \times \boxed{} = 216$$

نکته: در موارد زیر برای محاسبه $f'(x)$ ابتدا $\ln f(x)$ را تمایز دهید و سپس از آن مشتق بگیرید.

1- $f(x) = u(x)$

2- اگر $f(x)$ به صورت ضرب یا تقسیم تعداد زیادی تابع باشد

* مشتق ضمنی

$$\underbrace{x^2 + y^2 + 5xy = \sin y}_{\text{یک عبارت ضمنی}} \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

* مشتق پارامتریک

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

* قاعده مشتق زنجیره‌ای

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1} \Rightarrow a = f^{-1}(b)$$

* مشتق از تابع وارون

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad f'(a) \neq 0$$

$$F(x, y) = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

(مثال)

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} \frac{x}{y} = 0$$

عبارت مختص

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = 2x + 0$$

$$\ln(u) = \frac{u'}{u}$$

$$\tan^{-1}(u) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F'_x}{F'_y} = \frac{-\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2}} = -\frac{\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}}{\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x}{x^2+y^2}} = -\frac{x+y}{x-y}$$

(مثال)

$$\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^2 + t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+1}{2t-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{\text{تقرین}}$$

(مثال)

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$$

$$f'(t=2) = ? \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

مسئله زنجیره

$$\frac{dz}{dx}$$

$$z = f(y)$$

$$y = g(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} =$$

$$z = f(\underbrace{g(x)}_y) = z' = g'(x) \times f'(g(x))$$

مثال)

$$f(x) = \sin^2 \pi x$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{5x-9}}{4}$$

$$(f \circ g)'(x) = ? = (f(g(x)))' \quad (f \circ g)'(2)$$

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = \underbrace{g'(x)} \times f'(g(x)) = \frac{5}{8} \times \pi = \frac{5\pi}{8}$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2\sqrt{5x-9}} \Rightarrow g'(2) = \frac{5}{8} \quad g(2) = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = 2 \sin \pi x \cdot (\pi \cos \pi x) = \pi \sin 2\pi x \Rightarrow f'(g(2)) = f'\left(\frac{1}{4}\right) = \pi \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) = \pi$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ 1-x^3 & x < 0 \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(\underbrace{-1}_b) = ? = \frac{1}{f'(a)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x > 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$-x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \begin{cases} +1 \checkmark \\ -1 \times \end{cases} \quad \boxed{a=1}$$

$$1-x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \quad \times$$

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

* مستقل مراتب بالا

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n F}{dx^n}$$

$$f'(0), f''(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{t} = 0$$



* تمرین

$$1) \quad x^2 - y^2 = 1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \text{ c.t. } \frac{\pi}{x} \quad f'(2) = ? \quad \boxed{\pi}$$

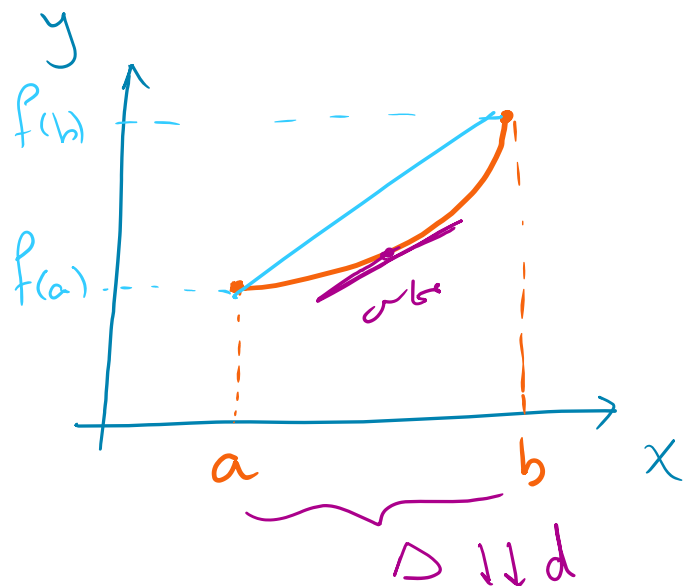
$$3) \quad f(x) = ([x] - |x|) \sqrt[3]{9x} \quad \boxed{-5} \quad \text{مشتق درست در } x = -3$$

$$4) \quad y = (x^2-1)(x^2-2) \dots (x^2-9)(x^2-10) \quad y'(3) = ?$$

* نکته :

عبارت با پیچان در $\lim$ $\rightarrow$ $y' = 2x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3) \dots (x^2-9)(x^2-10) = -6 \times 8!$

$y' = (f' \dots)$ $\leftarrow$ عامل منفی کننده



اگرچه تغییر

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \text{آنگاه} = \boxed{\frac{dy}{dx}}$$

مثال) $f(t) = t^2 \leftarrow t=2$ اگرچه آنگاه $\Rightarrow f'(2) = 2t = 2(2) = 4$

در چه زمانی اگرچه تغییر برابر با 60 مقدار می باشد
 $P(t) = t^2 - 1$

$P'(t) = 2t \quad 2t = 60 \Rightarrow t = 30$

معادله خط $y - y_0 = m(x - x_0)$
 $\downarrow$
 $f'(x)$

$$y + \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(\sqrt{3x-5})$$

خط مماس بر منحنی در نقطه $x=2$ محاسبه می‌شود

$$x=2 \rightarrow \text{مقادیر خط} \rightarrow x=0$$

$$y = \tan^{-1}(\underbrace{\sqrt{3x-5}}_u) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}}{1+(3x-5)} \xrightarrow{x=2} m = y'(2) = \frac{3}{4}$$

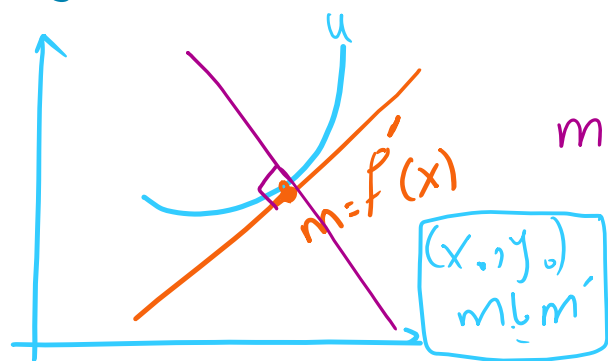
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\boxed{y - 0 = \frac{3}{4}(x - 2)} \Rightarrow x=0 \quad y = \frac{3}{4}(-2) = -\frac{3}{2}$$

$$x=2 \rightarrow y = \tan^{-1}(1) - \frac{\pi}{4} = 0 \quad (2, 0)$$

$$y = \tan(\cos x)$$

خط مماس در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ نیاز داریم را درجه اول قطع می‌کنند



$$m' = -\frac{1}{m}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \tan(\cos \frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow (\frac{\pi}{2}, 0)$$

$x_0 \quad y_0$

$$y' = -\sin x \times (1 + \tan^2(\cos x)) \rightarrow m = y'(\frac{\pi}{2}) = -1 \leftarrow \text{شیب خط مماس}$$

$$y = \tan u \rightarrow u'(1 + \tan^2 u)$$

$$m' = -\frac{k}{m} = -\left(\frac{1}{-1}\right) = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

معادله خط مماس

$$y - 0 = -1 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$$

خط قائم

$$y - 0 = 1 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y = x - \frac{\pi}{2}$$



نیازنامه داریم $y = -x$

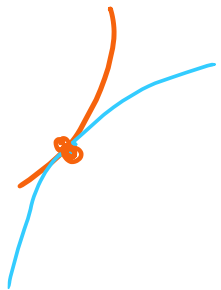
$$-x = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$

* تمرین: f دو درجه نقطه بهم محاسبت.

$$g(x) = x + 1$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$$



$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

رشته مماس داشته

کامیاب و مبارک باد

$c \in D_f$ نقطة حرجية $\Rightarrow \begin{cases} f'(c) = 0 \\ f'(c) \text{ غير متناهية} \\ \text{بالـ} \end{cases}$

مثال) $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$
 $D_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
 $f'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}$ $x=0$ مثال بد نفقه عيررس

مسئله به ازای دسر بازه و عدد ندارد
اما نقاط دسر بازه چند نقاط هم از این می باشد

مثال) $f(x) = \sin x \cos x$ نقاط مماس $\Rightarrow f'(x) = \cos 2x$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 10\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{10\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(تمرین) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

$x = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

(تمرین) $f(x) = x|x^2 - 1|$ $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ چند نقطه میانی دارد $[-2, 2]$

* **تقنیه** فرض کنید f در بازه $[a, b]$ مشتق پذیر باشد

(1) $f'(x) > 0$ صعودی است

(2) $f'(x) < 0$ نزولی است

(3) $f'(x) = 0$ تابع ثابت

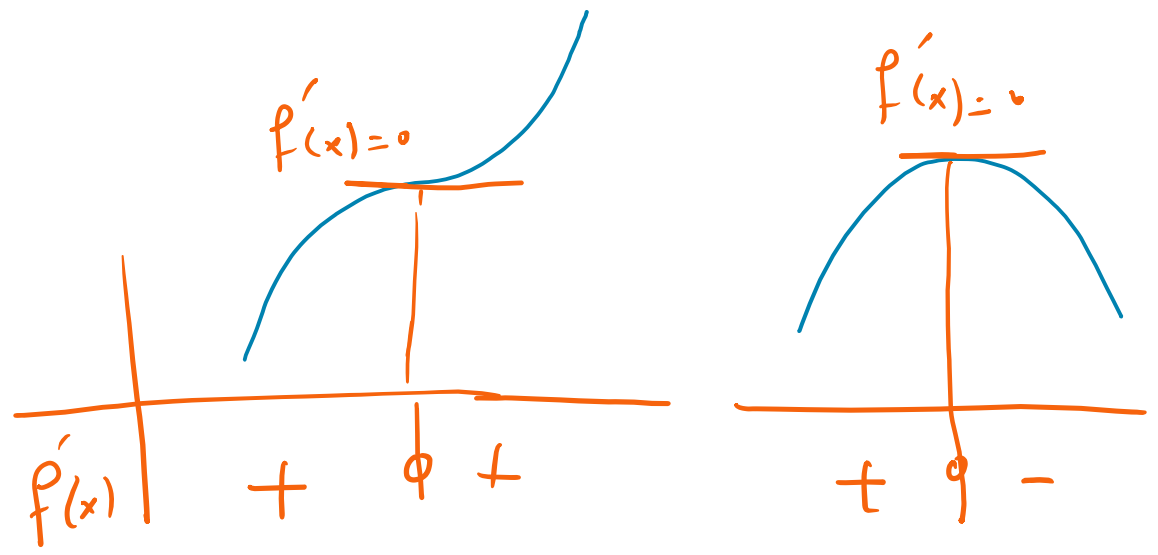
(مثال) $f(x) = a^{-x} \quad a > 1$
 $g(x) = b^x \quad 0 < b < 1$ } وضعیت f و g چگونه

$f'(x) = -a^{-x} \ln a < 0 \Rightarrow$ f نزولی است

$g'(x) = b^x \ln b < 0 \Rightarrow$ g نزولی است

نقاط بحرانی
نقاط استدم

$$f(x) = \begin{cases} x^x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & x < 0 \end{cases}$$



آزمون مشتق اول (مالکزم میبینیم نه)

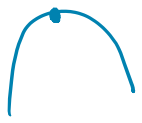
اگر x نقطه بحرانی تابع f مشتق f در x صفر باشد
- تابع f در x پیوسته

x میبینیم نه است



1- اگر f در x از مقدار منفی به مثبت تغییر علامت دهد =

x مالکزم میبینیم نه



2- --- مثبت به منفی --- =

3- اگر --- تغییر علامت ندهد = از این آزمون نمی توان استفاده کرد

$$y = x - 2 \ln x$$

$$y' = 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 2$$

	2	
y'	-	+
	min	

فرض $y = \frac{4 \ln^2 x}{x}$

مخالفات نقطه میانی

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تقسیم نوع تقاطع بر اساس

آزمون مشتق دوم

$f'(x) = 0$ و همچنین $f''(x)$ مورد نیاز است

۱- $f''(x) > 0$ باشد آنگاه تابع f در x دارای بیشینه نسبی است

۲- $f''(x) < 0$ - - - - - $f''(x) = 0$ - - - - - مالکیم نسبی است

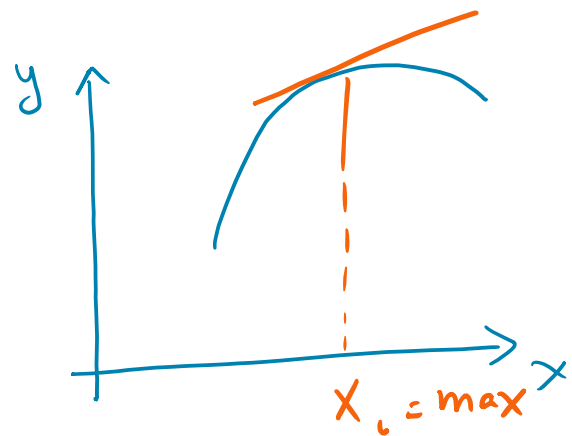
۳- $f''(x) = 0$ - - - - - آزمون جواب نمی‌دهد

(مثال) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array} \right.$$

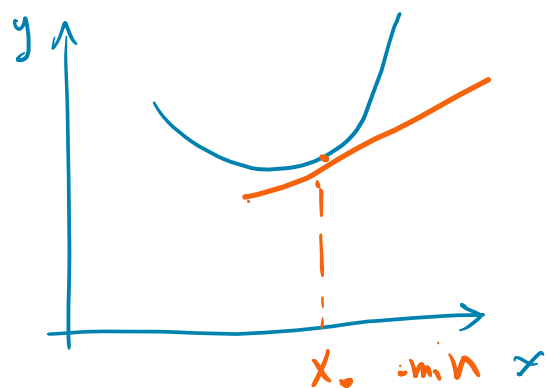
$$f''(x) = 6x - 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} f''(0) < 0 \quad \text{max} \\ f''(2) > 0 \quad \text{min} \end{array} \right.$$

$y = x(e^x - 1)$ (نکته) $x=0$ بیایم این تابع چه وضعیتی دارد $\min$ $\max$ ؟



$f''(x) < 0 \Rightarrow$ نقطه رو به پایین

تعریف نقطه



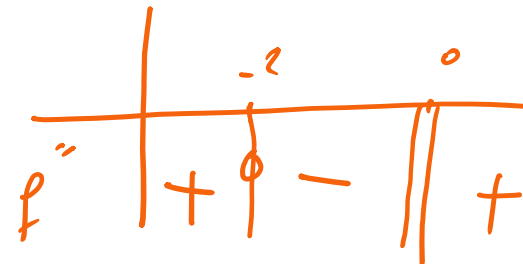
$f''(x) > 0$ نقطه رو به بالا

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$$

رو به پائین است $\Rightarrow (-2, 0)$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9} \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}} \right)$$



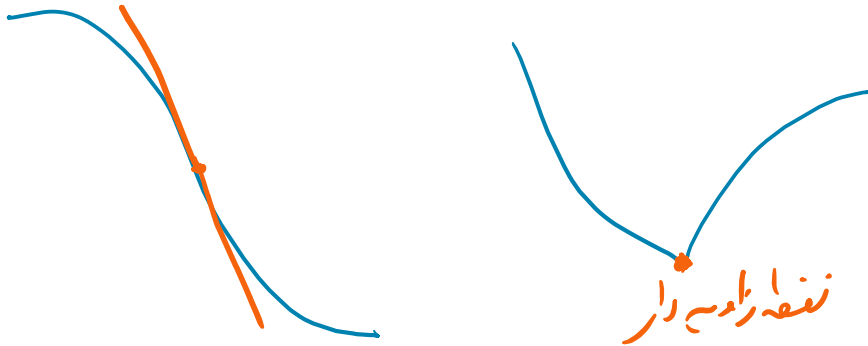
$$\underbrace{x=0 \quad x=-2}$$

نکته) $f(x) = e^{x-2x^2}$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

نقطه عطف

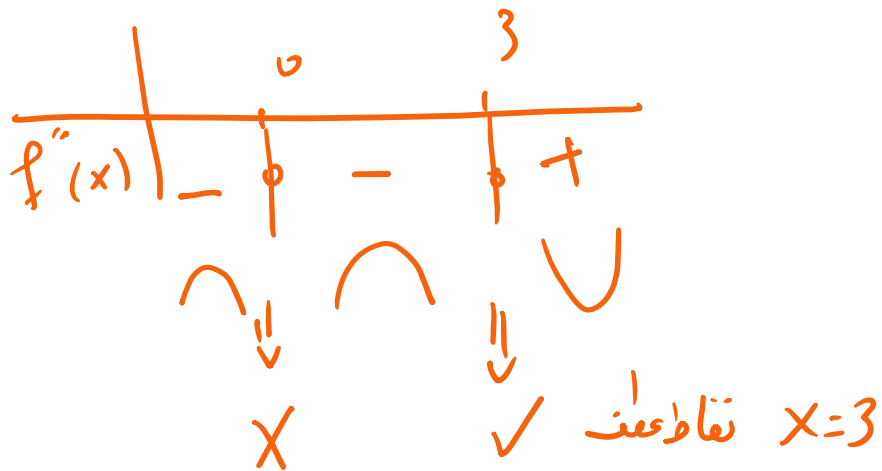
- ۱- اگر f در C دارای محاسبات باشد $\{$ نقطه عطف
- ۲- نقطه در C عطف است



مثال) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x - 7$

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

$$20x^2(x-3) \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$



تمرین ۱) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ طول نقطه حذف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x > 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x |x^2 - 4x|$$

مثال ۱)

$$y = \sqrt{2x+9}$$

$$A(4,0)$$

$P(x_1, y_1)$

* $A \mid \begin{matrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 0 \end{matrix}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + \underbrace{(y-0)^2}_{(\sqrt{2x+9})^2}} \Rightarrow \textcircled{d = \sqrt{x^2 - 6x + 25}}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 25 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow x = 3$$

مثال ۲) $x+y=10 \rightarrow y=10-x$

$P = x \cdot y$ $P' = 0 \Rightarrow$

$$P = x \cdot y$$

$$P = x(10-x) = 10x - x^2 \Rightarrow P' = 10 - 2x \Rightarrow \begin{matrix} x = 5 \\ y = 5 \end{matrix}$$

بهینه ساز و کمیت مورد نیاز

(نکته)

$$1) \quad X_1 + X_2 + \dots + X_n = \text{ثابت}$$

$$\max \Rightarrow X_1^{k_1} \times X_2^{k_2} \times \dots \times X_n^{k_n} \Rightarrow \frac{X_1}{k_1} = \frac{X_2}{k_2} = \dots = \frac{X_n}{k_n}$$

$$2) \quad X_1^{k_1} \times X_2^{k_2} \times \dots \times X_n^{k_n} = \text{ثابت}$$

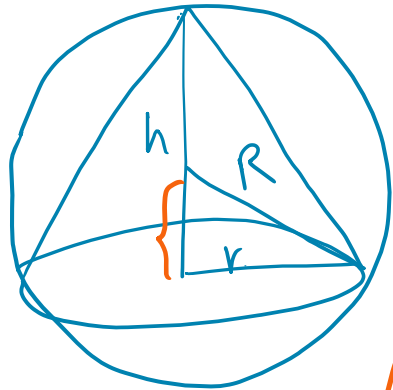
$$\min \Rightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n \Rightarrow \frac{X_1}{k_1} = \frac{X_2}{k_2} = \dots = \frac{X_n}{k_n}$$

مثال $\frac{X+y=9}{X \cdot y=?}$, $X \cdot y^2 = \text{ثابت}$ $\frac{X}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow \underline{y = 2X} \Rightarrow \begin{cases} X=3 \\ y=6 \end{cases}$

$$x+y+z=1$$

$$\max (xy^2z^3)=?$$

جواب)



$$R^2 = r^2 + (h-R)^2$$

$\Downarrow$

$$r^2 = 2hR - h^2$$

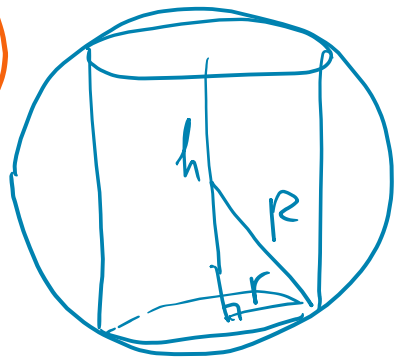
$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \max(v)$$

$$v = \frac{1}{3} \pi (2hR - h^2) \cdot h \Rightarrow v_h' = \frac{\pi}{3} (4Rh - 3h^2)$$

$$\frac{\pi}{3} (2h^2R - h^3)$$

$$h = \frac{4R}{3} \quad \text{عند } v$$

(عربی)



$h=? \Rightarrow \max$ حجم
استوانه
مستطیل

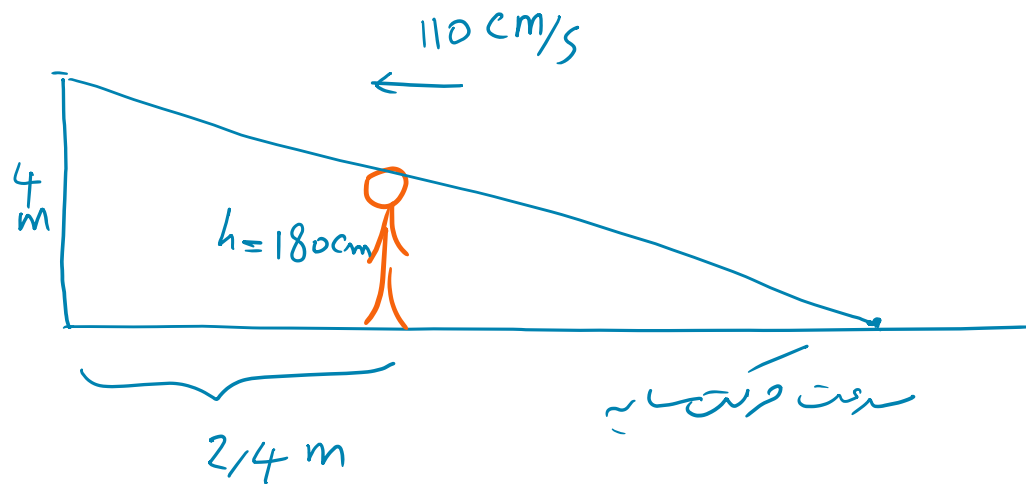
کینٹ کے وابستہ



$$10^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = 8m$$

$$2x \left(\frac{dx}{dt} \right) + 2y \times \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2 \times 6 \times \frac{dx}{dt} + 2 \times 8 \times (-0.5) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}}$$



$$x'_t = -90 \frac{cm}{s}$$

قاعدہ ہر ہیتال

$$\frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{}$$

$$\text{مثال) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + 4x} = \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2x}{e^x + 4} = \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{H} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{تمرین) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\pi \sin \pi x}{1 - \frac{4}{2\sqrt{x}}}$$

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow F(x) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{ضد مشتق}$$

انتگرال { معین
نامعین

- ویژگی‌های انتگرال نامعین

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \Rightarrow \int a dx = a \int dx = ax + C$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

* فرمول انتگرال

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

(مثال) $\int \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right) dx = ?$

$$\int \frac{x^2}{4} dx + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}$$

(تمرین) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$ پاسخ : $\frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{12}{5} x^{\frac{5}{6}} + 2 x^{\frac{1}{2}}$

(مثال) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} dx = ?$ $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{x - (x-1)} = \int (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) dx$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(مثال) $\int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x+2} = x - 2 \ln|x+2| + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int e^x dx = \frac{e^x}{\ln e} = e^x + C$

$$4) \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \times \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \quad \text{مثال) } \int (2x-1)^{10} dx = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^{11}}{11}$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C \Rightarrow \int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$8) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

تمرين

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}$$

$$\int \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2} \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) + C$$

$$9) \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$10) \int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$11) \int \sec^2 x \, dx = \tan x$$

$$12) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$15) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|$$

$$16) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$17) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

(مثال) $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{8}\right) + C$

(18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

(مثال) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ? \quad \frac{1}{1} \sec^{-1}\left|\frac{x}{1}\right| = \sec^{-1}x$

تکنیک انتگرال گیری
۱- تغییر متغیر
۲- جز به جز
۳- تجزیه به کسرها جزئی

تغییر متغیر
(مثال) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

$\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$
 $\int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

$$\int \frac{1}{\underline{x} (\ln x)^3} dx \quad \left. \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \end{array} \right\} \int \frac{1}{u^3} du = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx \quad \left. 1 + \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \right\} \int \frac{u-1}{u} du = \int du - \int \frac{du}{u}$$

$$u - \ln|u| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1} + 3} dx \quad \begin{array}{l} x-2=u \\ dx=du \end{array}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 3}} = (u)^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \frac{(1+\ln x) - \ln|1+\ln x| + C}{\ln \left| \frac{x}{1+\ln x} \right| + C}$$

$$\sqrt{u^2 - 3} = \sqrt{u^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$J_{10}^{\circ}) - \frac{1}{2} \int \underbrace{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx}_{-2}$$

$$\left. \begin{aligned} 1-x^2 &= u \\ -2x dx &= du \end{aligned} \right\}$$

$$-\frac{1}{2} \int \underbrace{u^{\frac{3}{2}} du} = -\frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5} \underbrace{u^{\frac{5}{2}}}_{(1-x^2)} + C$$

$$\int \underbrace{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}_{u} \underbrace{x dx}_{\frac{du}{-2}} = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} du \quad x dx = \frac{du}{-2}$$

$$J_{10}^{\circ}) \int \frac{\overbrace{x^2 \cdot x}^{x^3}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{u}}} dx \quad \frac{du}{-2}$$

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= u \Rightarrow -2x dx = du \\ \Downarrow \\ x^2 &= 1-u \end{aligned} \quad x dx = \frac{du}{-2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(1-u)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-u)}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \left[\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \int \sqrt{u} du \right]$$

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]$$

(المعين)

$$\int \frac{x^2}{x^6 + 64} \quad x^3 = u$$

$$\int x^3 \sqrt{1 + 2x^2} \, dx \quad 1 + 2x^2 = u$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx \quad x^2 = u$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} \, dx \quad 1 + e^x = u$$

$$\int x^3 e^{x^4} \, dx \quad x^4 = u$$

$$\int x^{4x} (\ln x + 1) \, dx$$

$$\begin{aligned} x^{4x} &= u \Rightarrow \ln x^{4x} = \ln u \\ 4x \ln x &= \ln u \end{aligned}$$

$$4(\ln x + 1) \, dx = \frac{du}{u}$$

$$\frac{1}{4} \int u \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \int du = \frac{1}{4} u + C = \frac{1}{4} x^{4x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} \, dx \rightarrow x = u^4$$

$$\int \frac{2(x-1)}{5} \, dx \quad 2(x-1) = u$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$$

$$\sin^2 x = u$$

تکلیف جزوه به جزوه

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال) $\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = ?$ $x \ln x - \int \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \ln x - \underbrace{\int dx}_x = \underline{x(\ln x - 1) + C}$

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$\boxed{\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C}$$

تمرین) $\int x \ln x dx$ $\begin{cases} \ln x = u \\ x dx = dv \end{cases} \Rightarrow$

مثال) $\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} = ?$ $\begin{cases} x = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ e^x = v \end{cases}$

$$\int u dv = uv - \int v du = x \cdot e^x - \underbrace{\int e^x dx}_{e^x} = e^x (x - 1) + C$$

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos 3x dx}_{dv} = ? \quad \begin{cases} x = u \\ \cos 3x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ \frac{1}{3} \sin 3x \end{cases}$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) - \frac{1}{3} \int \sin 3x \cdot dx$$

$$\text{Jho) } \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = ?$$

$$e^x = u$$

$$\sin x \, dx = dv \Rightarrow \begin{cases} e^x \, dx = du \\ -\cos x = v \end{cases}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \underbrace{e^x \cdot (-\cos x)} - \underbrace{\int (-\cos x) e^x \, dx}$$

$$+ \underbrace{\int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\cos x \, dx}_{dv}}$$

$$\begin{cases} e^x = u \\ \cos x \, dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \, dx = du \\ \sin x = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int \sin x e^x \, dx \right]$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2}$$

تمرین) $\int \sin(\ln x) dx = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \ln x = t \Rightarrow e^t = x \Rightarrow e^t dt = dx \end{array} \right\} \int \sin t \times e^t dt$$

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = ? \quad (\sqrt{x} = t) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$$

$$\int \arctan t \left(\underbrace{2\sqrt{x} \times dt}_{2t dt} \right) = \int \arctan t \times 2t dt$$

$$\begin{cases} \arctan t = u \\ 2t dt = dv \end{cases}$$

$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{cases} \arctan x = u \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = dv \end{cases}$$

تکلیف تجزیه به کسرها فشرده

$$\frac{5x-4}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$\downarrow$
 $(x+1)(x-3)$

$$\frac{S}{(x-a)^k}$$

$\downarrow$
 $\frac{p}{k}$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx$$

$$2 \ln(x+1) + 3 \ln(x-3) + C$$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} S_x f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \cancel{(x+1)} \times \frac{5x-3}{\cancel{(x+1)}(x-3)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 3} \cancel{(x-3)} \times \frac{5x-3}{(x+1)\cancel{(x-3)}} = 3$$

$$\frac{1}{(\underbrace{x^2+2x+3})^2} = \frac{A_1x+B_1}{\underbrace{x^2+2x+3}} + \frac{C_1x+D_1}{(\underbrace{x^2+2x+3})^2}$$

$$(x-a)^k$$

$$\frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

مثال) $\int \frac{dx}{x^3+1} =$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}$$

$$B \xrightarrow{\times x} \frac{x}{x^3+1} = \frac{Ax}{x+1} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2-x+1} \xrightarrow[\text{در بنیان}]{\lim_{x \rightarrow \infty}} 0 = A + B$$

$$C \rightarrow x=0 \quad 1 = \frac{A}{1} + \frac{0+C}{1} \Rightarrow C = 1 - A = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} dx$$

$$\Rightarrow \underline{B = -A} = -\frac{1}{3}$$

عمرین) $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$

عمرین) $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

فهم) $\int \frac{1}{x^4-1} dx \Rightarrow \frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C(x+1)}{x^2+1}$

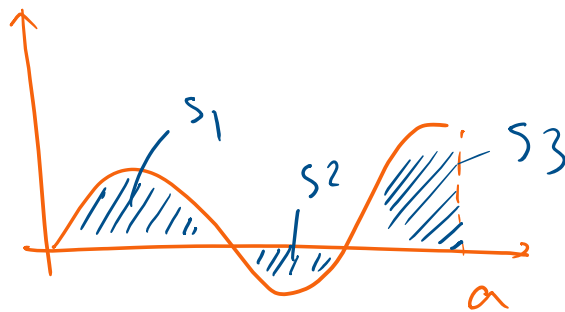
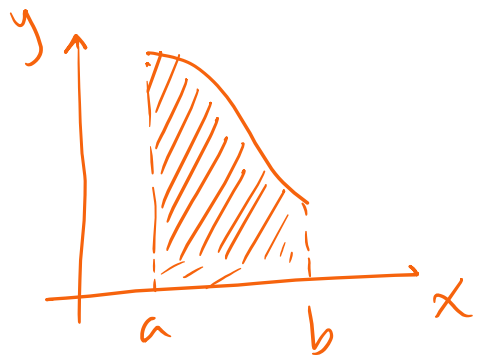
$$x^4-1 = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \times \frac{1}{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \times \frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{4}$$

$\therefore D \Rightarrow x=0 \Rightarrow 1 = -A + B + D \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \quad \therefore C \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \Rightarrow 0 = A + B + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

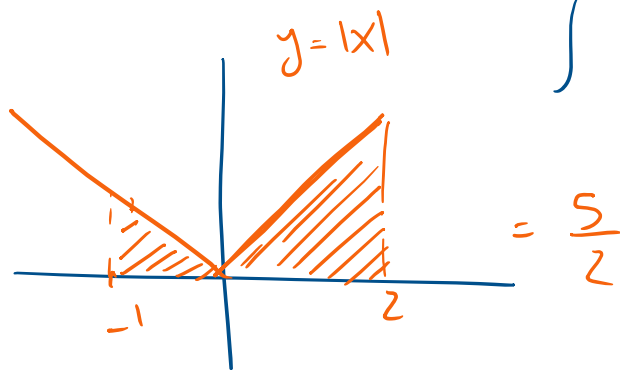
$$\int_a^b f(x) dx$$



انتگرال معین

$$\int = S_1 - S_2 + S_3$$

$$\text{مثال 1)} \int_{-1}^2 |x| dx$$



$$= \frac{5}{2}$$

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \underbrace{\int_{-1}^0 -x dx}_{-\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0} + \underbrace{\int_0^2 x dx}_{\frac{x^2}{2} \Big|_0^2} = 0 - (-\frac{1}{2}) + (\frac{4}{2} - 0) = \frac{5}{2}$$

$$\text{تمرین 1)} \int_{-1}^2 (|x| + |x+1|) dx = 7$$

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2) \int_{(a)}^{(a)} f(x) dx = 0$$

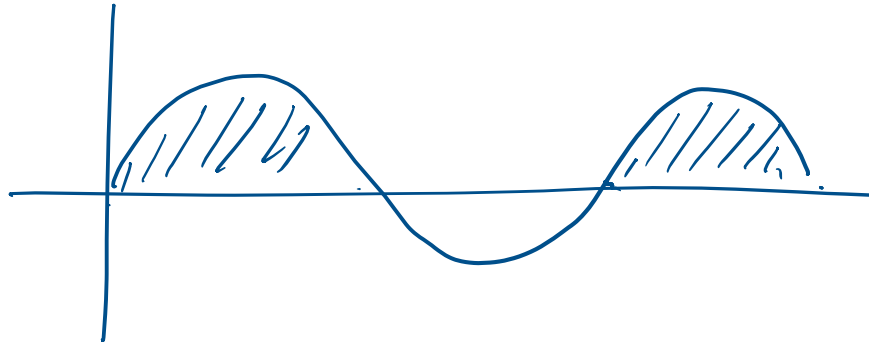
$$3) \begin{cases} \text{فرد} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \\ \text{زوج} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \end{cases}$$

$$4) \int_a^b (kf(x) + g(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{خطی بودن انتگرال}$$

$$5) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$6) \int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

$$7) \int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx$$



Übung 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^5 \cos x}_{f(x)} dx = ?$ • $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$

$$\int_{-3}^3 x 2^{x^2} dx = ? \quad \circ \quad f(-x) = -f(x)$$

(تمرین) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = ?$ = انتگرال واداست
 $\circ x$
 ناسره

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(عزیز)

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \tan^{-1} 1$$

$e^x = u$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \tan^{-1} e - \underbrace{\tan^{-1} 1}_{\frac{\pi}{4}}$$

$0 < x < 1 \Rightarrow e < e^x < e^1$

$$\int_0^1 \tanh x dx = ?$$

$$\int_0^2 \sqrt{x^7 + x^4} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = 2$$

$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2$
 $dx = 2t dt$

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx$$

$$x^3 - x = 0 \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array} \right.$$

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx = \underbrace{\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx} + \underbrace{\int_0^1 (x - x^3) dx} + \underbrace{\int_1^2 (x^3 - x) dx}$$

انستدال ناسده (عئداسر يا مجازس)

$$\int_a^b f(x) dx \quad a \leq b \leq +\infty$$

نوع اول

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

$$\text{مثال}) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{c}{2} \right) - \underbrace{\frac{1}{2} \tan^{-1} (0)}_0 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

مثال) $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = ?$ $\frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} (\cancel{e^{-\infty}} - \cancel{e^0}) = \frac{1}{2}$

$\int_0^{\infty} e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{\infty} = \infty$ واگر است

انتگرال ناسده نوع دوم

$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ $f(3) = \infty$ $= \lim_{c \rightarrow 3^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

$\lim_{c \rightarrow 3^-} \sin^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow 3} \left[\sin^{-1} \frac{c}{3} - \cancel{\sin^{-1} 0} \right]$

$= \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^a x^{-p} dx$$

(a, b)

$$a > 0, p > 0$$

تحت چه شرایطی این انتگرال همگرا است

p چه شرایطی داشته باشد تا این انتگرال همگرا باشد؟

* آزمون لحه مقین همگرا یا واگرا است شکل ده نامه
آزمون مقابله

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad f(x) \geq g(x) \geq 0$$

$$J = \int_a^b g(x) dx$$

1- اگر I همگرا باشد، J همگرا است

2- J واگرا باشد، I واگرا است

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} dx = ?$$

(مثال)

واگراست ← واگراست

$$\frac{1}{\ln x} > \left(\frac{1}{x} \right) > 0$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(x) \Big|_2^{\infty} \text{ واگراست}$$

نقطه ناسگس $x=0$

$$\int_0^1 \frac{(x+2)}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

$$\frac{x+2}{x^2 + \sqrt{x}} \sim \underbrace{\frac{2}{\sqrt{x}}}_{\text{عمران}}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

تابع اصلی گسسته $\Rightarrow$ مقدار صدار

(تمرین)

$$\int_0^\pi \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}} dx$$

دنباله و سری

دنباله یک مجموعه از اعداد که به ترتیب هم قرار می گیرند. تابعی است که رابطه آن اعداد طبیعی و بر این مجموعه اعداد معین است

$$\{a_n\} \quad \underbrace{a_1, a_2, a_3, \dots}_{\text{یک جمله دنباله}} \quad \underbrace{a_n}_{\text{جمله nام}} \quad a_n = f(n) \\ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$\left\{ (-1)^{n+1} \right\} = 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$\left\{ C_n \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right\} \quad C_1 \frac{\pi}{2} = 0 \quad C_2 \pi = -1 \quad C_3 \frac{3\pi}{2} = 0 \quad C_4 2\pi = 1 \quad C_5 \frac{5\pi}{2} = 0$$

$$\left\{ (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \right\} \quad \underbrace{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots}_{\text{دنباله متناوبه است}} = \underline{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots}$$

$$\{\sin n\pi\} \quad 0, 0, 0, \dots \quad \{0\}$$

یک دنباله ثابت

مثال) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ مجموع چند جمله‌ای اول این دنباله برابر با 8- است؟

$$(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = -8$$

$$\sqrt{1} - \sqrt{x+1} = -8 \Rightarrow 9 = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = 80$$

مثال) $a_n = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{n^2-1}{n^2}$ $a_{20} = ?$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right)}_{\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{3}{4} \times \frac{5}{4}} \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{20}\right) = \frac{21}{40}$$

چند جمله از این دنباله جمع است

مثال) $\left\{ \frac{51}{2n-11} + 2 \right\}$

$$2n-11 = 1 \Rightarrow n = 6 \checkmark$$

$$2n-11 = -1 \Rightarrow n = 5 \checkmark$$

$$2n-11 = 3 \Rightarrow n = 7 \checkmark$$

$$2n-11 = -3 \Rightarrow n = 4 \checkmark$$

$$2n-11 = 17 \Rightarrow n = 14 \checkmark$$

$$2n-11 = -17 \Rightarrow n = -3 \times$$

$$2n-11 = 51 \Rightarrow n = 31 \checkmark$$

$$2n-11 = -51 \Rightarrow n = -20 \times$$

تدوین

$$a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow \text{دنباله حسابی} \quad a, a+d, a+2d, a+3d$$

$$a_{n+1} = q a_n \Rightarrow \text{دنباله هندسی} \quad a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

دنباله بازگشتی

دنباله فیبوناچی

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

(مثال) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

دنباله ثابت

$$\Rightarrow c = \sqrt{c+2} \Rightarrow c=2$$

حده صغیر a_n و b_n با هم برابرند؟

$$b_n = \left\{ \frac{n^2 - 5}{2n} \right\}$$

$$b_n = a_n \Rightarrow \frac{n^2 - 5}{2n} = 2 \Rightarrow n^2 - 5 = 4n \Rightarrow n^2 - 4n - 5 = 0$$

$$\begin{cases} n = -1 \times \\ n = 5 \checkmark \end{cases}$$

درصورتی که $n > 32$ مقدار صغیر

$$\left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \right\} \text{ کمتر}$$

$$n > 32 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} > \frac{15}{64}$$

گنگرایی و دگرایی (مثال)

$$\{a_n\} \rightarrow l$$

$$a_n = \frac{3n}{n+2} \rightarrow$$

اگر a_n به مقدار l همگرا شود، هر زیر دنباله از a_n نیز به l همگراست

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots \rightarrow l$$

$$\{a_{2n}\} a_2, a_4, a_6, \dots \rightarrow l$$

مسئله) $a_n = \frac{3n}{n+2} \rightarrow 3$

$$\lim \left(1 + \underbrace{a_{2n}}_3 + 4 \underbrace{a_{n+5}}_3 \right) = 1 + 3 + 4 \times 3 = 16$$

$$\log n < n^b < a_n < n! < n^n$$

$$\left\{ \frac{n^2}{2} \right\} \rightarrow 0$$

ضرب، جمع، تفریق، تقسیم
همگرا

همگرا $\{a_n\}$
و نه $\{b_n\}$

جمع، تقسیم
و نه

ضرب، تقسیم
باید بهر دو

مدرسہ فیضان

- انواع دنبالہ اور واگرا

$$\{a^n + 2n + 6\}$$

دکرات: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$

واگرا نو سالن $\Rightarrow \{(-1)^{n+1}\} \Rightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

حدافض واگرا $\{ \sin n \}$

(مثال) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{3\sqrt{n}}{5\sqrt{n}} = \frac{3}{5}$

$$(نمونه) \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} - \frac{n^2 + 1}{n} \right\} \xrightarrow{\lim} 1$$

$$\left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{دنباله همگرا در l می‌گردد}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \text{از پایین می‌گردد}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Rightarrow \text{از بالا می‌گردد}$$

هر دنباله همگرا یک کران دارد
و اگر آن کران را پیدا کنیم

$$(نمونه) \left\{ \frac{n+5}{n^2+1} \right\}$$

$$\left\{ \frac{n^2+6}{n+1} \right\}$$

$$\left\{ \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$$

دنباله معدوم و نزولی

$$\left\{ \cos \frac{n\pi}{4} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dots$$

دنباله غیر یکنوا

همه معدوم یا همگی نزولی = بلینا



$$a_{n+1} - a_n \begin{cases} > 0 & \text{معدوم} \\ < 0 & \text{نزولی} \end{cases} \quad \text{ردیف تفاضل}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} > 1 & \text{معدوم} \\ < 1 & \text{نزولی} \end{cases} \quad \text{ردیف مقیم}$$

$$a_n = f(n) \quad y = f(x) \quad f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{معدوم} \\ < 0 & \text{نزولی} \end{cases} \quad \text{ردیف مشتق}$$

آیا یکنوا است؟

$$\{8n - n^2\}$$

مثال) $a_n = \frac{n!}{15^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \rightarrow$$

$$\frac{\frac{(n+1)!}{15^{n+1}}}{\frac{n!}{15^n}} = \frac{(n+1)n!}{15^n \times 15} = \frac{n+1}{15} \geq 1 \Rightarrow \underline{n \geq 14}$$

حدنقل چند جمله اول این دنباله حذف شود تا دنباله همگرا باشد.

13 جمله اول باید حذف شود.

در رابطه با همگرایی یا نهمگرایی بودن و گداختار بودن $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ بحث شد

عمرین $\left\{ \cos \frac{\pi}{n} \right\}$ $\left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\}$ $\left\{ \sin \frac{\pi}{n} \right\}$

عمرین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ همگرا است یا واگرا

آزمون والاسیور

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} > 1 & \text{واگرا} \\ < 1 & \text{همگرا} \\ = 1 & \text{آزمون جواب نمی‌دهد} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} > 1 & \text{واگرا} \\ < 1 & \text{همگرا} \\ = 1 & \text{آزمون جواب نمی‌دهد} \end{cases}$$

مثال) $Z^2 = \frac{4}{1+i} - i(2+i)$ $|Z| = ?$ $\sqrt{x^2+y^2}$

$\underbrace{\frac{4}{1+i}}_{x+iy}$

$$\frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{4(1-i)}{1-\underbrace{(i^2)}_{-1}} = 2(1-i)$$

$$Z^2 = 2 - 2i - 2i - i^2 = 3 - 4i$$

$$\underline{|Z^2|} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |Z| = \sqrt{5}$$

جمع $Z_1 \pm Z_2$
 تفریق $Z_1 \times Z_2$
 تقسیم $\frac{Z_1}{Z_2}$
 ضرب Z_1